学校代码：10246
学　　号：18110840014

復旦大學

博 士 学 位 论 文

（学术学位）

接触型哈密顿-雅可比方程的粘性解

Viscosity solutions of contact type Hamilton-Jacobi equations

院　　　　系：上海数学中心

专　　　　业：应用数学

姓　　　　名：倪盼睿

指 导 教 师：严军　教授

完 成 日 期：2023 年 5 月 18 日

指导小组成员

袁小平　教　授
张国华　教　授
梁振国　副教授

目　录

摘 要

假设 M 是紧致连通光滑流形，T^*M 是其上的余切从。记 $(x,p,u)\in T^*M\times\mathbb{R}$. 假设连续函数 $H(x,p,u)$ 对 p 凸且强制性增长，对 u 一致 Lipschitz 连续。考虑如下两类方程：

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)+H(x,Du(x,t),u(x,t))=0, & (x,t)\in M\times(0,+\infty).\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in M,\ \varphi\in C(M).\end{cases}$$

和

$$H(x,Du(x),u(x))=0,\quad x\in M.$$

前者被称为演化方程的 Cauchy 问题，后者则被称为定态方程。本文定义了下面形式的负向解半群算子

$$T_t^-\varphi(x)=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_s^-\varphi(\gamma(s)))\mathrm{d}s\right\},$$

以及正向解半群算子

$$T_t^+\varphi(x)=\sup_{\gamma(0)=x}\left\{\varphi(\gamma(t))-\int_0^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)))ds\right\}.$$

利用上面定义的半群算子，本文给出了演化方程粘性解的半群表示，以及算子 T_t^- 不动点 u_- 在 T_t^+ 作用下的渐近行为。

在 Hamilton-Jacobi 方程粘性解理论中，粘性解的存在性一般由 Perron 方法保证[1]。这一方法需要进一步构造有序关系的粘性上解和粘性下解。作为半群表示的应用，我们首先考虑了定态方程粘性解存在性的一个充分必要性条件。进一步，在 $H(x,p,u)$ 关于 u 有不同的依赖假设下，本文对定态方程与演化方程 Cauchy 问题进行了深入研究。

当 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递增的时候，根据比较原理定态方程的粘性解是唯一的。本文仿照弱 KAM 理论定义了共轭对以及相应的投影 Aubry 集。当 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递减时，本文证明了定态方程粘性解的一致有界性，以及关于投影 Aubry 集邻域的一个新的比较定理。进一步，本文通过一个例子说明了邻域这个条件是必要的。

现在我们考虑一类非单调的模型，我们称它为广义的打折方程

$$H(x,Du)+\lambda(x)u=c,\quad x\in M,$$

其中 $\lambda(x)$ 是变号的。关于这类方程，最初的突破由金亮、严军和赵恺给出[2]，其中 $H(x,p)$ 是满足 Tonelli 条件的，即它是 C^3 的，且关于 p 严格凸、超线性增长。我们首先将他们的结果弱化到我们的框架中，即 $H(x,p)$ 连续，对 p 凸且强制性增长。进一步，我们详细刻画了定态方程粘性解集合的结构与演化方程 Cauchy 问题粘性解的长期行为。

现在我们考虑第二类非单调的模型。假设 $H(x,p,u)$ 关于 u 满足周期性条件，即 $H(x,p,u)=H(x,p,u+1)$. 我们首先刻画了使得 $H(x,Du(x),u(x))=c$ 有粘性解的 c 的集合 $\mathscr{C}$，证明了 $\mathscr{C}$

是一个有界闭区间。令 u^c 是方程

$$\partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u(x,t)) = c.$$

的粘性解。第二个主要结论说明了函数族 $\{u^c\}_{c\in\mathscr{C}}$ 的一致有界性，并且给出了它的一致 Lipschitz 估计。第三个主要结论刻画了 u^c 的长期行为，其中 $c \notin \mathscr{C}$. 这个结论的证明借助于解半群算子和圆周自映射之间的一个有趣联系。

在文章的最后一部分，我们将单个方程中得到的结果应用于耦合的方程组中。首先我们给出了弱耦合方程组

$$H_i(x, Du_i(x), u_i(x), u_j(x)) = 0, \quad i \neq j \in \{1, 2\}$$

粘性解存在性的一个新的定理，这里经典的单调性条件不成立。我们引入了一个衡量方程组耦合强度的量 χ. 当 $\chi < 1$ 时，方程组存在粘性解。当 $\chi = 1$ 时，我们运用打折项消失方法得到了方程组的粘性解。

接着我们考虑了描述多类型参与者的平均场模型

$$\begin{cases} H_i(x, Du_i(x)) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} B_{ij}(x)u_j(x) = F_i(x, m_1, \dots, m_k), \\ \operatorname{div}\left(m_i \dfrac{\partial H_i}{\partial p}(x, Du_i(x))\right) = 0, \\ \displaystyle\int_M m_i dx = 1. \end{cases}$$

并且在单调性假设下证明了这个模型广义解的存在性。

关键字：粘性解；Hamilton-Jacobi 方程；弱 KAM 理论

中图分类号：O175.22

／
Abstract

Assume M is a closed, connected and smooth Riemannian manifold. Denote by T^*M the cotangent bundle over M. Consider the following two forms of equations

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)+H(x,Du(x,t),u(x,t))=0, & (x,t)\in M\times(0,+\infty).\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in M,\ \varphi\in C(M).\end{cases}$$

and

$$H(x,Du(x),u(x))=0,\quad x\in M.$$

The first one is called the Cauchy problem of the evolutionary equation, and the second one is called the stationary equation. We introduce the following backward solution semigroup

$$T_t^-\varphi(x)=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_s^-\varphi(\gamma(s)))\mathrm{d}s\right\},$$

and the corresbonding forward solution semigroup

$$T_t^+\varphi(x)=\sup_{\gamma(0)=x}\left\{\varphi(\gamma(t))-\int_0^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)))ds\right\}.$$

Using the semigroups above, we provide a representation formula of the viscosity solution of the evolutionary equation. Moreover, we prove the asymptotic behavior of the fixed points u_- of T_t^- under the action of T_t^+.

In the theory of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, the existence of viscosity solutions are usually given by the Perron's method[1]. To use this method, we have to construct an ordered pair of supersolution and subsolution. As an application of the solution semigroup, we obtain a necessary and sufficient condition for the existence of the viscosity solutions of the stationary equations. We further discuss the stationary equations and the Cauchy problem of evolutionary equations under different dependence of $H(x,p,u)$ on u.

When $H(x,p,u)$ is strictly increasing in u, the viscosity solution of the stationary equation is unique by the comparison principle. Inspired by the weak KAM theory, we define the conjugate pair and the projected Aubry set. When $H(x,p,u)$ is strictly decreasing in u, the uniformly boundedness of the viscosity solutions of the stationary equation is proved. We prove a new comparison result depending on a neighborhood of the projected Aubry set essentially. An example is constructed to show that the requirement of the neighborhood is necessary.

Now we consider a class of non-monotone model, which is called the generalized discounted Hamilton-Jacobi equation

$$H(x,Du)+\lambda(x)u=c,\quad x\in M,$$

where $\lambda(x)$ changes the signs. The first breakthrough to this model was achieved by L. Jin, J. Yan and K. Zhao under the Tonelli conditions [2]. In their paper, $H(x,p)$ satisfies the Tonelli condition, i.e., it is of class C^3, strictly convex and superlinear in p. In this paper, we first generalize their results under our assumptions, i.e., $H(x,p)$ is continuous, convex and coercive in p.Moreover, we consider more detailed structure of the viscosity solution set and large time behavior of the viscosity solution on the Cauchy problem.

Now we consider the second class of non-monotone model. Assume $H(x,p,u)$ is periodic in u, i.e., $H(x,p,u) = H(x,p,u+1)$. We first characterize the set $\mathscr{C}$, which consists of all c's such that $H(x,Du(x),u(x)) = c$ admits viscosity solutions. We prove that $\mathscr{C}$ is a closed bounded interval. Let u^c be the viscosity solution of

$$\partial_t u(x,t) + H(x,Du(x,t),u(x,t)) = c.$$

The second main result guarantees the uniform boundedness of $\{u^c\}_{c\in\mathscr{C}}$ and provides a Lipschitz estimate of $\{u^c\}_{c\in\mathscr{C}}$ with respect to the argument x. The third main result concerns with the long-time behavior of u^c with $c \notin \mathscr{C}$. This result was proved by using an interesting connection between the Lax-Oleinik semigroup and the homeomorphisms of the circle.

In the last part of this paper, we apply the results we get for single Hamilton-Jacobi equations to coupled nonlinear equations. A new existence result for viscosity solutions of

$$H_i(x,Du_i(x),u_i(x),u_j(x)) = 0, \quad i \neq j \in \{1,2\}$$

is obtained in this paper when the classical monotonicity condition does not hold. An important quantity denoted by χ is proposed, which measures the strength of coupling. When $\chi < 1$, the coupled system admits viscosity solutions. The vanishing discount method is used to get the solvability of the weakly coupled system when $\chi = 1$.

Then we introduce a weakly coupled mean field games model of first order for k different kinds of major players

$$\begin{cases} H_i(x,Du_i(x)) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} B_{ij}(x)u_j(x) = F_i(x,m_1,\dots,m_k), \\ \operatorname{div}\left(m_i \dfrac{\partial H_i}{\partial p}(x,Du_i(x))\right) = 0, \\ \displaystyle\int_M m_i dx = 1. \end{cases}$$

The existence of solutions of this kind of weakly coupled mean field games model is proved.

Keywords: Viscosity solutions; Hamilton-Jacobi equations; weak KAM theory

CLC code: O175.22

符号表

$\operatorname{diam}(M)$	紧致无边流形 M 的直径
$d(x, y)$	由 M 上黎曼度量诱导的 x 和 y 之间的距离
$\|\cdot\|$	由 M 上黎曼度量诱导的切空间和余切空间上的范数
$B(v, r)$	切空间中以 v 为中心 r 为半径的范数球
$H_1(M, \mathbb{R})$	流形 M 的一阶下同调群
$H^1(M, \mathbb{R})$	流形 M 的一阶上同调群
$C(M)$	流形 M 上实数值连续函数全体
$C(M, \mathbb{R}^k)$	流形 M 到 $\mathbb{R}^k$ 的向量值连续函数全体
$\operatorname{Lip}(M)$	流形 M 上 Lipschitz 连续函数全体
D	关于空间变量 x 的导数
$\|\cdot\|_\infty$	实数值或向量值函数的最大模范数
$\operatorname{esssup}_M \|f(x)\|$	函数 $f(x)$ 的本质上确界
$\mathscr{P}(X)$	流形 X 上 Borel 概率测度全体
$[t]$	实数 t 的整数部分
$\{t\} = t \pmod 1$	实数 t 的小数部分

第 1 章　介绍

1.1　Hamilton-Jacobi 方程

Hamilton-Jacobi 方程起源于经典力学[3]，并且在若干领域有重要的作用，包括最优控制理论[4–7]，最优传输[8–11]，金融市场[12]，微分博弈[13–14]，微分几何[15–16]，内界面运动[17–19]，流体力学[20]，相变理论[21]，以及机器学习的参数优化[22]。

含粘性项 $\mu\Delta u$ 的 Hamilton-Jacobi 方程

$$H(x, Du(x), u(x)) = \mu\Delta u(x) \tag{1.1}$$

可以划归为拟线性的椭圆方程。拟线性椭圆和拟线性抛物微分方程的研究则可以追溯到 O. A. Ladyzhenskaya, H. Amann 和 A. Friedmann 等人的工作[23–28]。从随机最优控制的角度而言，粘性项来自于布朗运动。对于这类方程，我们一般有全局经典解。而对于一阶非线性方程，全局经典解通常不存在。一个简单的例子如下

$$|u'(x)| = 1, \quad x \in [-1, 1], \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

这里周期性边界条件等价于要求 x 属于单位圆周 $\mathbb{S}^1 \simeq [-1, 1)$. 显然这个方程没有经典解。如果我们定义弱解为几乎处处满足这个方程的函数，那么这个方程的解将会有无穷多个。注意到解的导数为 ± 1，那么我们可以在 (x, u) 平面上用斜率为 ± 1 的任意折线连接 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$，这样就得到了该方程的几乎处处解。因此几乎处处满足方程这个条件太宽泛了。自然地，我们想通过解的稳定性得到一阶方程的合适的弱解，即在 (1.1) 中令 μ 趋于零，这一方法被称作粘性消失方法。利用这一方法得到的解被称为粘性解。

定义 1.1 令 M 是一给定的光滑流形。连续函数 $u : M \to \mathbb{R}$ 被称为非线性方程

$$H(x, Du(x), u(x)) = 0, \quad x \in M \tag{1.2}$$

的粘性下解 (resp. 粘性上解)，如果对于任意 C^1 的试验函数 ϕ，当 $u - \phi$ 在 x 取得极大值 (resp. 极小值) 的时候，有

$$H(x, D\phi(x), u(x)) \le 0, \quad (\text{resp.} \quad H(x, D\phi(x), u(x)) \ge 0).$$

如果函数 u 同时是粘性上解和粘性下解，那么它被称为是方程的粘性解。

对于非线性二阶方程，例如实 Ampere-Monge 方程，我们也可以类似定义粘性解[15]。此外，粘性解也可以在非连续函数类中定义[7,29]。分布意义下弱解的定义依赖于分部积分，而粘性解的概念依赖于极大值原理。当方程是线性的时候，可以证明两者的等价性[30]。

对于 (1.2) 以及下面形式的 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的研究已有很长的历史

$$\partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u(x,t)) = 0. \tag{1.3}$$

我们称 (1.2) 为定态方程, (1.3) 为演化方程。在定义 1.1 中将 $x \in M$ 换成 $(x,t) \in M \times (0,+\infty)$，令 Hamilton 函数为 $\bar{H}(x, p_t, p_x, u) = p_t + H(x, p_x, u)$，即可定义演化方程的粘性解。在关于粘性解的存在性、唯一性、稳定性与长期行为，人们已有大量的相关结论[31–34]。特别是不显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\partial_t u(x,t) + G(x, Du(x,t)) = 0, \tag{1.4}$$

人们对它的理解已经非常透彻了，其特征线方程正是经典的 Hamilton 方程[35]

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial G}{\partial p}(x,p), \\ \dot{p} = -\frac{\partial G}{\partial x}(x,p). \end{cases} \tag{1.5}$$

上个世纪发展出的 Aubry-Mather 理论详细刻画了 Hamilton 系统的全局极小轨道，见第 1.2 节。A. Fathi 在上世纪 90 年代建立了弱 KAM 理论，这个理论建立了 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解理论与 Hamilton 系统 Aubry-Mather 理论之间的联系，见第 1.3 节。之后，A. Fathi，A. Siconolfi, A. Davini 等人将 Tonelli 系统的弱 KAM 理论弱化到了偏微分方程的框架之下，此时 Hamilton 方程无法定义。显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程的特征线方程被称为接触 Hamilton 方程。近期，对于接触 Hamilton 方程，相应的变分原理、Aubry-Mather 理论由王楷植、王林、严军等人建立，见第 1.4 节。同时，他们在非单调的框架下给出了相应的解半群。为了约化未知函数带来的非线性约束，这一解半群是隐式定义的。利用得到的解半群，他们对定态方程的解的存在性、解集的结构，以及演化方程的长期行为做了进一步研究。

这里我们整理一些关于 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的结论。下面令 M 是紧致无边的光滑流形，TM 和 T^*M 是其上的切丛和余切丛。我们对 $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 提如下条件

性质 1.1 $H(x,p,u)$ 连续。

性质 1.2 强制性：$\lim_{\|p\|\to+\infty}(\inf_{x\in M} H(x,p,0)) = +\infty$.

性质 1.3 一致 Lipschitz：存在 $\lambda > 0$ 使得 $|H(x,p,u) - H(x,p,v)| \le \lambda |u - v|$ 对所有 $(x,p) \in T^*M$ 和 $u, v \in \mathbb{R}$ 成立。

性质 1.4 凸性：对于所有 $(x,u) \in M \times \mathbb{R}$，$H(x,p,u)$ 关于 p 凸。

定理 1.1 (Perron 方法)[1,36] 假设性质 1.1-1.3 成立，并且存在 (1.2) 的一对 Lipschitz 连续的粘性上解 ψ 和粘性下解 ϕ，满足 $\phi \le \psi$，那么该方程存在 Lipschitz 连续的粘性解。

定理 1.2 (比较原理)[37] 假设 $H(x,p,u)$ 连续，关于 u 严格单调递增，方程 (1.2) 有 Lipschitz 连续的粘性解，那么对于方程 (1.2) 的任意连续上解 ψ 和连续下解 ϕ，有 $\phi \le \psi$. 特别地，方程 (1.2) 的粘性解是唯一的。

定理 1.3 (遍历问题)[38] 当 $G : T^*M \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1 和 1.2，存在唯一的 $c(G) \in \mathbb{R}$ 使得

$$G(x, Du(x)) = c \tag{1.6}$$

在 c 取 $c(G)$ 时有粘性解。这里的 $c(G)$ 被称为 Mañé 临界值。

定理 1.4 (长期行为)[39] 当 $G : T^*M \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1 和 1.2，并且关于 p 严格凸，那么对于所有的连续初值 φ，Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + G(x, Du(x,t)) = c(G), & (x,t) \in M \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in M \end{cases} \tag{1.7}$$

的粘性解 $u(x,t)$ 随着 $t \to +\infty$ 一致收敛到 (1.6) 的一个粘性解。

定理 1.5 (长期行为)[40] 假设 $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1 和 1.2，如果它对 u 单调非减，对 p 严格凸，并且 (1.2) 有解，那么对于所有的连续初值 φ，Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u(x,t)) = 0, & (x,t) \in M \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in M \end{cases} \tag{1.8}$$

的粘性解 $u(x,t)$ 随着 $t \to +\infty$ 一致收敛到 (1.2) 的一个粘性解。

如果 H 关于 p 非严格凸，上述的长期行为不一定成立，例如

$$\partial_t u(x,t) + |Du(x,t) + a| - a = 0, \quad x \in \mathbb{S}^1.$$

当 $a \geq 1$ 时，上述方程有时间周期的周期解 $u(x,t) = \sin(x-t)$.

从上面的结果可以知道，当 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递增，演化方程的粘性解随着 $t \to +\infty$ 一致收敛到定态方程的唯一粘性解。因此这类方程的粘性解的结构与长期行为是完全清楚的。因此在这篇文章中，我们主要考虑 $H(x,p,u)$ 关于 u 单调递减和非单调的情况。

1.2 Aubry-Mather 理论

对于可积的 Hamilton 系统，在作用量-角变量坐标下，相空间由不变环面分层[3]。对于近可积系统，即对可积系统加上的小扰动，Kolmogorov 宣布了在一定非退化条件下大多数不变环面在小扰动下仍然保持下来。这一结果后来被 Arnold 和 Moser 在不同条件下严格证明，因此被称为 KAM 定理[41]。这一结果被认为是上个世纪最伟大的科学发现之一，它说明不可积系统的运动并非是完全无序的。

当扰动足够大，KAM 环面开始破裂，但是依然有一些具有分型结构的不变集被保存下来。在扭转映射理论中，这类集合被称为 Aubry-Mather 集[42]。在上世纪 90 年代，J. Mather 将低维的 Aubry-Mather 理论推广到了高维，现在称之为 Mather 理论[43]。在低维的时候，极小轨道有很好的序关系。而到了高维，这种序关系不复存在。因此我们不能指望在高维的时候平均速度向量和轨道有一一对应的关系。高维的时候我们不能直接考虑轨道的极小性，而要在平均的意义下考虑测度的极小性。Mather 基于上面的思路构建了高维的 Mather 理论，其中使得平均作用量函数取到极小的不变概率测度称为极小测度，其支撑集称为 Mather 集。

Aubry-Mather 理论的重要意义不仅在于 Hamilton 动力学，它在全局极小测地线、极小构型理论、Lorentz 几何与广义相对论、最优传输等方面也有重要作用[8,42,44]。

令 M 是紧致连通光滑流形，TM 是其上的切丛。我们对 C^2 的 Lagrange 函数 $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 做如下要求：

- 周期性：$L(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t+1)$.
- Tonelli 条件：$L(x,\dot{x},t)$ 关于 $\dot{x}$ 超线性增长，即当 $\|\dot{x}\| \to +\infty$ 时，$L(x,\dot{x},t)/\|\dot{x}\| \to +\infty$，并且 L 关于 $\dot{x}$ 的二阶导数矩阵 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}$ 是正定的。
- 相流完备，即 Euler-Lagrange 方程
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$
的解是整体存在的。

根据经典的结果，Euler-Lagrange 方程是作用量函数

$$h^t(x,y) = \inf_{\substack{\gamma(0)=x\\ \gamma(t)=y}} \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),\tau)d\tau$$

的临界方程[3]。根据 Tonelli 定理 (见命题 A.1)，当 L 满足 Tonelli 条件时，上述极小在绝对连续曲线类中取得[45]。定义 Legendre 变换 $(x,\dot{x}) \mapsto (x,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})$，在 Tonelli 条件下可以证明这个变换是从 TM 到 T^*M 的微分同胚。相应地，通过 Legendre 变换，我们也可以把由 Euler-Lagrange 方程定义的流变换为由 (1.5) 定义的 Hamilton 流。

记 $P^* = P \cup \infty$ 是 $P = TM \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 的单点紧化。我们将 Euler-Lagrange 方程生成的相流延拓到 P^* 上，要求 Euler-Lagrange 流 Φ_L 保持无穷远点不变。记 $\mathfrak{M}_L$ 是 P^* 上的 Φ_L-不变概率测度。Kryloff 和 Bogoliuboff 在 1937 年指出，紧度量空间上的任意流 Φ 存在不变测度。在这里，无穷远点的单点测度显然就是 Euler-Lagrange 流的不变测度，但是这并没有什么意义。下面的引理说明了其他的不变测度的存在性。定义测度 μ 的平均作用量函数

$$A(\mu) = \int_{P^*} L d\mu.$$

引理 1.1 *存在 $\mu \in \mathfrak{M}_L$ 使得 $A(\mu) < +\infty$.*

下面仍然记 P 到 TM 上的投影为 P，μ 是其上的 Borel 概率测度。令 η 是 M 上的光滑 1-形式，也可以将它看作是切丛 TM 上的函数并且关于纤维是线性的。若 μ 是使得 $A(\mu) < +\infty$ 的 Borel 概率测度，由于 $L(x,\dot{x},t)$ 超线性增长，$\eta \in L^1(\mu)$.

引理 1.2 *若 η 恰当并且 μ 是 Φ_L-不变测度，那么 $\int \eta d\mu = 0$.*

根据上面引理，我们可以引入不变测度的旋转向量的概念

定理 1.6 若 μ 是 Φ_L-不变的，对于 M 上所有闭的 1-形式 η，存在向量 $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$ 满足

$$\langle [\eta], \rho(\mu) \rangle = \int \eta d\mu,$$

其中 $[\eta]$ 为 η 的 de Rham 上同调类，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示同调和上同调的内积。

若 $c \in H^1(M, \mathbb{R})$，定义

$$A_c(\mu) = A(\mu) - \langle c, \rho(\mu) \rangle = \int (L - \eta) d\mu,$$

其中 η 是 M 上闭的 1-形式满足 $[\eta] = c$. 它定义在使得 $A(\mu) < +\infty$ 的测度集上，当 $A(\mu) = +\infty$，记 $A_c(\mu) = +\infty$. 实际上考虑平均作用量函数 A_c 的极小值相当于考虑一个条件变分问题。令 $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ 的对偶是 $h \in H_1(M, \mathbb{R})$，现在就是要寻找满足 $\rho(\mu) = h$ 的极小测度。在低维的 Aubry-Mather 理论中，就是要寻找旋转数 ω 给定的 Aubry-Mather 集 $\mathscr{M}_\omega$. 既然 η 闭，η 的积分与路径无关，由 L 和 $L - \eta$ 定义的作用量函数的极小曲线相同，因此 L 和 $L - \eta$ 的 Euler-Lagrange 流相同。由于 A_c 下半连续，它在紧凸集 $\mathfrak{M}_L$ 上取得极小值，记为 $-\alpha(c)$，这就是 Mather α-函数，而 Mañé 临界值就是 α-函数在零点的值。既然 α-函数图的上方

$$\{(c, z) \mid z \geq \alpha(c),\ c \in H^1(M, \mathbb{R})\}$$

是凸的，α-函数在 $H^1(M, R)$ 上是凸函数。考虑凸函数 α-函数的凸对偶

$$-\beta(h) = \min\{\alpha(c) - \langle c, h \rangle\}.$$

根据定义如果 $\mu \in \mathfrak{M}_L$ 并且 $A(\mu) < +\infty$, 就有

$$\beta(\rho(\mu)) = \max\{\langle c, \rho(\mu) \rangle - \alpha(c)\} \leq A(\mu).$$

下面的引理保证了 β 函数是点点有限的。

引理 1.3 对于 $h \in H_1(M, \mathbb{R})$，存在 $\mu \in \mathfrak{M}_L$ 使得 $A(\mu) < +\infty$ 并且 $\rho(\mu) = h$.

根据这个引理，我们可以得到

定理 1.7 函数 α 和 β 互为凸对偶，点点有限且超线性增长。对于 $h \in H_1(M, \mathbb{R})$，有

$$\beta(h) = \min\{A(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{M}_L,\ \rho(\mu) = h\},$$

因此我们称 $\beta(h)$ 为旋转向量 h 的平均极小作用量。对于 $c \in H^1(M, \mathbb{R})$，有

$$-\alpha(c) = \min A_c(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{M}_L\}.$$

此外对于 $\mu \in \mathfrak{M}_L$，$A(\mu) = \beta(\rho(\mu))$ 当且仅当存在 $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ 使得 $A_c(\mu)$ 在 μ 上取得极小，此时称 μ 为极小测度。

记 $\mathfrak{M}_c$ 是 A_c 的极小不变概率测度集，显然它是紧凸集。此外，根据 Krein-Milman 定理，这个集合存在端点，这些端点是遍历测度。

定义 1.2 同调类 c 对应的 Mather 集 $\tilde{\mathcal{M}}_c$ 定义为支撑集 $\mathrm{supp}\mathfrak{M}_c$，其中的点 x 满足对于 x 的任意一个邻域，有 $\mu \in \mathfrak{M}_c$ 使得这个邻域是正测集。

对于 Mather 集，有如下重要的 Lipschitz 图性质

定理 1.8 投影 π：$\tilde{\mathcal{M}}_c \to M \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 是单的，其逆是 Lipschitz 连续的。

这个结果的证明依赖于黎曼几何中的 shortening 引理。这个定理可以看作是扭转映射里 Birkhoff 图性质的推广，它说明 Mather 集上的极小轨道的运动不是完全无序的。在后面，我们将会从 Hamilton-Jacobi 方程的角度重新叙述这一结论。

上面定义的 Mather 集是不够描述同宿轨和异宿轨的，以非线性摆为例，可以证明 Mather 集就是双曲平衡点，而平衡点之间的同宿归并不在 Mather 集中。为了进一步研究全局极小轨道，Mather 进一步在高维推广了自己在扭转映射连接轨道里的工作[46]。他引入了两类障碍函数 B_c 和 B_c^*，并且证明了在扭转映射中，当 $(c, \alpha(c))$ 取到 α-函数图的上方的端点的时候，障碍函数 B_c 就是 Peierls 障碍函数。可以证明 $0 \le B_c^* \le B_c$，因此 B_c 的零点集包含在 B_c^* 的零点集里面，之后人们称 B_c 的零点集为 Aubry 集，B_c^* 的零点集为 Mañé 集。在 Mather 的文章里，Aubry 集由 regular 的 c-极小构型组成，现在人们称它为静态曲线。

从粘性解理论的角度而言，Hamilton 函数通常满足更弱的条件，例如 $G(p) = \|p\|$，它在 $p = 0$ 处不可导。当 Hamilton 函数仅仅是连续的，相应的 Hamilton 方程不能被定义。经过 Legendre 对偶，就是相应的 Euler-Lagrange 流不能被定义。此时 Φ_L-不变的概率测度是无法被定义的。引理 1.2 中的性质可以被推广为闭测度，而 Mather 测度就是极小的闭测度[47]。基于此，Mather 测度的概念还可以被推广到带有随机项的 Hamilton 系统中，其对应的 Hamilton-Jacobi 方程含有二阶项[48]。

1.3　弱 KAM 理论

正如第 1.1 节所说，Hamilton-Jacobi 方程 (1.4) 的特征线方程就是 Hamilton 方程 (1.5)，因此 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解理论与 Aubry-Mather 理论是紧密相关的。在上个世纪九十年代，A. Fathi 建立起两者的联系，这一理论被称为弱 KAM 理论[49–50]。

下面我们从 Fathi 的观点重新定义 Mather 理论中的一系列集合，其出发点即寻找系统不变集的 Hamiltom-Jacobi 方法。

定理 1.9 (Hamilton-Jacobi 方法) 令 η 是 M 上的闭 1-形式，若 $G(x,p)$ 在 η 的 Lagrange 图 $G_\lambda := \{(x, \eta_x)\}$ 上是常数，那么这个图在 (1.5) 定义的 Hamilton 流下不变。

从辛几何的角度来说，一个光滑闭形式的图像给出了一个水平的 Lagrange 子流形。令 $L_\eta = L - \eta$，相应的 Hamilton 函数 $H_\eta(x,p) = H(x, \eta + p)$，此时考虑 Hamilton 函数 H_η 就相当于把同调类 $[\eta]$ 置于零了。下面我们只考虑 $[\eta] = 0$ 的情形。

如前所述，经典的 KAM 定理给出的不变环面是方程 (1.6) 的经典解 $u(x)$ 的 Lagrange 图 $G_u = \{(x, Du(x))\}$. 正如 Aubry-Mather 集给出的是同调方程的弱解，弱 KAM 理论给出的是 Hamilton-Jacobi 方程的粘性 (弱) 解，相应的 Lagrange 图只能是伪图[51]。

下面我们假设 $G: T^*M \to \mathbb{R}$ 是 C^2 的，并且满足 Tonelli 条件

性质 1.5 $G(x,p)$ 关于 p 的二阶导数矩阵 $\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}$ 是正定的，并且 $G(x,p)$ 关于 p 是超线性增长的。

相应的 Lagrange 函数定义为 G 的 Legendre 对偶

$$L(x,\dot{x}) := \sup_{p\in T_x^*M}\{\langle \dot{x}, p\rangle_x - G(x,p)\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ 表示切空间和余切空间之间的内积。可以证明相应的 Lagrange 函数 $L(x,\dot{x})$ 也是满足 Tonelli 条件的，即是 C^2 的，对 $\dot{x}$ 正定且超线性增长[4]。

下面我们不加证明地给出弱 KAM 理论中的若干概念与结论，包括被控制函数、校准曲线、弱 KAM 解、Lax-Oleinik 半群与共轭对。值得说明的是，从 overlapping 伪图的动力学的角度，我们也可以描述 Aubry 集和 Mañé 集[51]，这与本节所叙述的观点是等价的。

定义 1.3 (被控制函数) 令 $u:\ U\to\mathbb{R}$，$c\in\mathbb{R}$，称 u 在 U 上被 $L+c$ 控制，记为 $u\prec L+c$，是指对于任意连续分段 C^1 曲线 $\gamma:\ [a,b]\to U$，有

$$u(\gamma(b))-u(\gamma(a))\le\int_a^b L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))ds+c(b-a).$$

若 $U=M$，则称 u 被 $L+c$ 控制。

定义 1.4 (校准曲线) 令 $u:\ U\to\mathbb{R}$ 是函数，$c\in\mathbb{R}$ 是常数，$U\subset M$. 称连续分段 C^1 曲线 $\gamma:\ I\to U$ 是 (u,L,c)- 校准的，如果对于任意 $t\le t'\in I$，有

$$u(\gamma(t'))-u(\gamma(t))=\int_t^{t'} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))ds+c(t'-t).$$

校准曲线的每一段都是校准的。

命题 1.1 假设 $u\prec L+c$，那么任何连续分段 C^1 的 (u,L,c)-校准曲线 $\gamma:\ I\to U$ 必定是连续分段 C^1 曲线类中的极小曲线，因此是 C^2 临界曲线。

定义 1.5 (弱 KAM 解) 方程 (1.6) 的负向 (resp. 正向) 弱 KAM 解是函数 $u:\ M\to\mathbb{R}$，使得存在 $c\in\mathbb{R}$，满足

(1) $u\prec L+c$；

(2) 对于任一 $x\in M$，我们可以找到一条 (u,L,c)-校准 C^1 曲线 $\gamma:\ (-\infty,0]\to M$ (resp. $\gamma:\ [0,+\infty)\to M$) 满足 $\gamma(0)=x$.

记负向 (resp. 正向) 弱 KAM 解为 u_- (resp. u_+)，其构成的集合为 $\mathcal{S}_-$ (resp. $\mathcal{S}_+$).

命题 1.2 对于连续函数 $u: M\to\mathbb{R}$，下面叙述是等价的:

(1) u 是 (1.6) 的粘性下解；

(2) $u\prec L+c$；

(3) u 是 (1.6) 的几乎处处下解。

定义 1.6 Mañé 临界值定义为

$$c(G)=\inf\{c\in\mathbb{R}\mid \exists u:\ M\to\mathbb{R},\ u\prec L+c\}.$$

命题 1.3 记 L 是 M 上 Tonelli 的 Lagrangian，$u: U \to \mathbb{R}$ 是连续函数，$u \prec L + c$，$\gamma: [a,b] \to U$ 是 (u, L, c)-校准曲线，有

(1) 若对于 t，Du 在 $\gamma(t)$ 上存在，那么

$$Du(\gamma(t)) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad H(\gamma(t), Du(\gamma(t))) = c.$$

(2) 对于所有 $t \in (a,b)$，u 在 $\gamma(t)$ 上的导数存在。

定义 1.7 (极小作用量) 定义函数 $h_t: M \times M \to \mathbb{R}$ 为

$$h_t(x,y) = \inf_{\gamma} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds,$$

其中极小在连续分段 C^1 曲线类中取。称上述函数为极小作用量函数。

定义 1.8 (Lax-Oleinik 半群) 给定 $\varphi \in C(M)$，$t > 0$. 定义 $T_t^- \varphi$ 为

$$T_t^- \varphi(x) = \inf_{\gamma} \left\{ \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds \right\},$$

其中极小在满足 $\gamma(t) = x$ 的绝对连续曲线类中取。再由极小作用量函数的定义，有

$$T_t^- \varphi(x) = \inf_{y \in M} (\varphi(y) + h_t(y,x)).$$

算子全体 $(T_t^-)_{t \geq 0}$ 称为 Lax-Oleinik 半群。

引理 1.4 T_t^- 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 是非扩张的，即 $\|T_t^- u - T_t^- v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$.

引理 1.5 T_t^- 将 $C(M)$ 映到自身，有下述性质：

(1) $\lim_{t \to 0} T_t^- \varphi = \varphi$.

(2) $(x,t) \mapsto T_t^- u(x)$ 在 $[0,+\infty) \times M$ 上连续，在 $(0,+\infty) \times M$ 上局部 Lipschitz.

(3) 对于 $\varphi \in C(M)$ 和 $x \in M$，$t > 0$，我们可以找到连续分段 C^1 曲线 $\gamma: [0,t] \to M$ 满足 $\gamma(t) = x$ 并且

$$T_t^- \varphi(x) = \varphi(\gamma(0)) + h_t(\gamma(0), x).$$

(4) $u \prec L + c$ 当且仅当 $T_t^- u + ct \leq u$.

定理 1.10 函数 $u(x,t) = T_t^- \varphi(x)$ 是 (1.7) 的唯一粘性解。

命题 1.4 对于连续函数 $u: M \to \mathbb{R}$，下面叙述是等价的：

(1) u 是 (1.6) 的粘性解；

(2) $T_t^- u + ct = u$；

(3) u 是 (1.6) 的负向弱 KAM 解。

定义 1.9 (正向 Lax-Oleinik 半群) 若 $L: TM \to \mathbb{R}$ 是一个 Lagrange 函数，定义它的对称 Lagrange 函数为 $\check{L}(x,v) = L(x,-v)$. 相应的 Lax-Oleinik 半群记为 $\check{T}_t^-$. 定义 L 对应的正向 Lax-Oleinik 半群为 $T_t^+\varphi = -\check{T}_t^-(-\varphi)$，容易证明它满足

$$T_t^+\varphi(x) = \sup_\gamma \left\{ \varphi(\gamma(t)) - \int_0^t L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))ds \right\}.$$

命题 1.5 对于连续函数 $u: M \to \mathbb{R}$，下面叙述是等价的:

(1) $-u$ 是 $G(x,-Du) = c$ 的粘性解;

(2) $T_t^+u - ct = u$;

(3) u 是 (1.6) 的正向弱 KAM 解。

命题 1.6 令 u： $M \to \mathbb{R}$ 是连续函数，下述情形等价:

(1) u 是 C^1 的并且属于 $\mathcal{S}_-$.

(2) u 是 C^1 的并且属于 $\mathcal{S}_+$.

(3) u 属于 $\mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+$.

(4) u 是 C^1 的并且 $G(x,Du) = c$，$\forall x \in M$.

我们如第 1.2 节那样，定义 Mather 测度为极小不变测度。Mather 集 $\tilde{\mathcal{M}}$ 为这些极小测度的支撑集。记投影 $\pi: TM \to M$，$\mathcal{M} = \pi(\tilde{\mathcal{M}})$ 为投影 Mather 集。注意到这里我们已经将上同调类 c 设为了零，因此我们考虑的是如下的变分问题

$$c(G) = -\inf_\mu \int_{TM} L d\mu,$$

我们首先从粘性解的角度重新叙述定理 1.8。

定理 1.11 如果函数 $u \in C(M)$ 满足 $u \prec L + c(G)$，那么它在投影 Mather 集上处处可微，并且对于 $(x,\dot{x}) \in \tilde{\mathcal{M}}$，有

$$Du(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x}).$$

映射 $\mathcal{M} \to T^*M$，$x \mapsto (x,Du)$ 是局部 Lipschitz 连续的，其 Lipschitz 常数独立于 u 的选取。

定理 1.12 如果两个弱 KAM 解在投影 Mather 集上相等，则它们处处相等。

Fathi 注意到，可以用正负向弱 KAM 解组成的共轭对重新刻画 Aubry 集和 Mañé 集。反过来，利用这些不变集，我们也可以进一步刻画 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解。

定理 1.13 (共轭对的存在性) 设函数 u 满足 $u \prec L + c(G)$，那么，存在唯一的负向弱 KAM 解 u_- (resp. u_+)，在投影 Mather 集 $\mathcal{M}$ 上 $u = u_-$ (resp. $u = u_+$). 进一步有

(1) $u_+ \leq u \leq u_+$.

(2) 若 $u_-^1 \in \mathcal{S}_-$ (resp. $u_+^1 \in \mathcal{S}_+$) 满足 $u \le u_-^1$ (resp. $u_+^1 \le u$)，那么 $u_- \le u_-^1$ (resp. $u_+^1 \le u_+$).

(3) $u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u + c(G)t$，$u_+ = \lim_{t\to+\infty} T_t^+ u - c(G)t$.

定义 1.10 (共轭对) 对于任何 $u_- \in \mathcal{S}_-$，存在唯一 $u_+ \in \mathcal{S}_+$ 在投影 Mather 集上两者相等。一对函数 (u_-, u_+) 称为是共轭的，如果 $u_\pm \in \mathcal{S}_\pm$ 且在投影 Mather 集上 $u_- = u_+$.

定义 1.11 (集合 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$) 考虑共轭对 (u_-, u_+)，定义

$$\mathcal{I}_{(u_-,u_+)} = \{x \in M \mid u_-(x) = u_+(x)\}.$$

命题 1.7 记投影 $\pi : TM \to M$，Φ_L^t 为给定时间 t 相应的 Euler-Lagrange 流。对于每点 $x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$，存在临界曲线 γ : $(-\infty, +\infty) \to M$，$\gamma(0) = x$，$\dot\gamma(0) = v$，使得对于 $t \in \mathbb{R}$，有 $u_-(\pi \circ \Phi_L^t(x, v)) = u_+(\pi \circ \Phi_L^t(x, v))$ 并且

$$\forall t \le t' \in \mathbb{R},\ u_\pm(\gamma(t')) - u_\pm(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot\gamma(s))ds + c(G)(t' - t).$$

从而，$u_\pm$ 在 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 上处处可微，并且在同一点具有同样的导数。此外有只依赖于 L 的常数 K 使得截面 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)} \to T^*M$，$x \mapsto Du_- = Du_+$ 具有不大于 K 的 Lipschitz 常数。

定义 1.12 (集合 $\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)}$) 若 (u_-, u_+) 是一对共轭函数，定义集合

$$\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)} = \{(x, v) \mid x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)},\ Du_- = Du_+ = \frac{\partial L}{\partial \dot x}(x, v)\} \subset TM.$$

命题 1.8 若 (u_-, u_+) 是一对共轭函数，投影 $\pi : TM \to M$ 诱导了一个 bi-Lipschitz 同胚 $\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)} \to \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$. 集合 $\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)}$ 是在 Euler-Lagrange 流下不变的紧致集，包含 Mather 集。若 $(x, v) \in \tilde{I}_{(u_-,u_+)}$，对于 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $u_-(\pi \circ \Phi_L^t(x, v)) = u_+(\pi \circ \Phi_L^t(x, v))$ 并且

$$\forall t \le t' \in \mathbb{R},\ u_\pm(\pi \circ \Phi_L^{t'}(x, v)) - u_\pm(\pi \circ \Phi_L^t(x, v)) = \int_t^{t'} L(\Phi_L^s(x, v))ds + c(G)(t' - t).$$

定义 1.13 (Mañé 集) Mañé 集定义为

$$\tilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{(u_-,u_+)} \tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)},$$

其中并取所有的共轭对。

定理 1.14 Mañé 集 $\tilde{\mathcal{N}}$ 是 TM 中的紧子集，在 Euler-Lagrange 流下不变，并且 $\tilde{\mathcal{M}} \subset \tilde{\mathcal{N}}$.

定义 1.14 (Aubry 集) Aubry 集定义为

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{(u_-,u_+)} \tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)},$$

其中交取所有的共轭对。投影 Aubry 集为 $\mathcal{A} = \pi(\tilde{\mathcal{A}})$.

定理 1.15 Aubry 集 $\tilde{\mathcal{A}}$ 紧，满足 $\tilde{\mathcal{M}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. $\tilde{\mathcal{A}}_0$ 在 Euler-Lagrange 流 ϕ_t 下不变。存在共轭对 (u_-, u_+) 使得 $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)}$. 投影 π 诱导了从 Aubry 集到投影 Aubry 集上的 bi-Lipschitz 同胚。

如 1.2 小节所述，投影 Aubry 集是一类障碍函数的零点集，我们重新叙述如下

定义 1.15 (Peierls 势) Peierls 势 $h: M \to \mathbb{R}$，定义为

$$h(x,y) = \liminf_{t\to+\infty} h_t(x,y) + c(G)t.$$

定理 1.16 令 $x \in M$，$x \in \mathscr{A}$ 当且仅当 $h(x,x) = 0$.

下面的定理说明投影 Aubry 集是阻碍全局严格粘性下解存在的区域。事实上，可以证明 (1.6) 存在光滑下解，并且在投影 Aubry 集之外是严格的[52]。

定理 1.17 令 $x \in \mathscr{A}$，那么

(1) 对于 (1.6) 的任意粘性下解 u 和 v，有 $G(x, Du) = C(G)$，并且 $Du = Dv$；

(2) 对于 (1.6) 的任意粘性下解 u，存在唯一的校准曲线 $\gamma: (-\infty,+\infty) \to \mathscr{A}$，$\gamma(0) = x$，使得对于 $t < t'$，有

$$u(\gamma(t')) - u(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot\gamma(s))ds + c(G)(t'-t).$$

(3) 对于 (1.6) 的任意粘性解 u 和 v，如果它们在 $\mathscr{A}$ 上相等，那么它们在 M 上相等。

1.4 接触 Hamilton 系统

在第 1.2 和 1.3 小节，我们介绍的理论主要考察的是不显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程 (1.4) 和 (1.6). 在本文中，我们研究的主要对象就是显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程 (1.2) 和 (1.3)，当 Hamilton 函数足够光滑，其特征线方程称为接触 Hamilton 方程[35]

$$\begin{cases} \dot x = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p,u), \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,p,u) - \dfrac{\partial H}{\partial u}(x,p,u)p, \\ \dot u = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x,p,u)\cdot p - H(x,p,u). \end{cases} \tag{1.9}$$

接触 Hamilton 方程定义的相流在接触流形 $T^*M \times \mathbb{R}$ 上生成了一个共形的接触变换。基于接触 Hamilton 系统和 Hamilton-Jacobi 方程的联系，我们称 (1.2) 和 (1.3) 为接触型的 Hamilton-Jacobi 方程。接触 Hamilton 系统近期在物理学的各个方面受到了关注，例如天体力学，经典与量子力学，热力学等等[53–57]。

我们的方法受到接触 Hamilton 系统相关工作的启发。在 [58] 中，作者给出了接触 Hamilton 方程对应的变分原理。基于此，[59] 研究了显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程，并且给出了演化方程粘性解的半群表示，以及遍历问题的解 $(c, u\_(x))$ 的存在性。[60] 进一步研究了单调递增情形接触系统的 Aubry-Mather 理论，给出了粘性解集合的细致刻画。在传统偏微分方程角度，由于缺乏比较定理，单调递减系统的粘性解集是非常复杂的。在 [61] 中，作者进一步对单调递减的系统进行研究，给出了粘性解集合的细致刻画。需要指出的是，为了保证极小曲线的 C^1 正则性，[58] 假设 $H(x,p,u)$ 具有 C^3 的光滑性，因此基于变分原理的系列工作都要求 $H(x,p,u)$ 具有足够高的光滑性。

同时，基于 G. Herglotz 的工作，[62–63] 也给出了和 [58] 相等价的变分原理。这类变分原理和非完整约束有关。基于这类变分原理，我们也能给出 (1.3) 粘性解的表示公式。

下面我们给出接触 Hamilton 系统以及接触型 Hamilton-Jacobi 方程的已有结论。在本小节中，我们假设 M 是紧致连通的光滑流形，并且 $H: T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^3 的，满足

性质 1.6 正定性：对于所有 $(x,p,u)\in T^*M\times\mathbb{R}$，二阶导数矩阵 $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x,p,u)$ 是正定的。

性质 1.7 增长性：对于所有 $(x,u)\in M\times\mathbb{R}$，$H(x,p,u)$ 对于 p 是超线性的。

性质 1.8 一致 Lipschitz：存在 $\lambda>0$ 使得对于所有的 $(x,p,u)\in T^*M\times\mathbb{R}$，有 $|\frac{\partial H}{\partial u}(x,p,u)|\le\lambda$.

显然当 $G: T^*M\to\mathbb{R}$ 是 C^3 的，并且满足 Tonelli 条件，即性质 1.5 时，打折 Hamilton 函数 $\lambda u+G(x,p)$ 就是一个满足性质 1.6-1.8 的接触 Hamilton 函数。打折 Hamilton-Jacobi 方程是一类特殊且重要的接触型 Hamilton-Jacobi 方程，关于它的粘性解的相关结论，可以参见 [47, 64–65]. 特别地，对于打折 Hamilton 函数，(1.9) 的前两式与第三式不耦合，即

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial G}{\partial p}(x,p),\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,p)-\lambda p.\end{cases}$$

上述方程的相流在辛流形 T^*M 上定义了一个共形辛映射，因此对这类系统的研究被称为共形辛动力学。在经典力学中，这类系统可以描述与速度成正比的摩擦力，摩擦系数就是 λ.

对于 $H: T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们通过凸对偶定义相应的 Lagrange 函数

$$L(x,\dot{x},u):=\sup_{p\in T_x^*M}\{\langle\dot{x},p\rangle_x-H(x,p,u)\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示切空间和余切空间之间的内积。既然 $H(x,p,u)$ 满足性质 1.6-1.8，$L(x,\dot{x},u)$ 满足相对应的下列性质

性质 1.9 正定性：对于所有 $(x,\dot{x},u)\in TM\times\mathbb{R}$，二阶导数矩阵 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}(x,\dot{x},u)$ 是正定的。

性质 1.10 增长性：对于所有 $(x,u)\in M\times\mathbb{R}$，$L(x,\dot{x},u)$ 对于 $\dot{x}$ 是超线性的。

性质 1.11 一致 Lipschitz：存在 $\lambda>0$ 使得对于所有的 $(x,\dot{x},u)\in TM\times\mathbb{R}$，有 $|\frac{\partial L}{\partial u}(x,\dot{x},u)|\le\lambda$.

定理 1.18 (隐式变分原理)[58]**.** 对于任意给定的 $x_0\in M$ 和 $u_0\in\mathbb{R}$，存在一个定义在 $M\times(0,+\infty)$ 上的连续函数 $h_{x_0,u_0}(x,t)$，满足

$$h_{x_0,u_0}(x,t)=u_0+\inf_{\substack{\gamma(t)=x\\ \gamma(0)=x_0}}\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),h_{x_0,u_0}(\gamma(\tau),\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{1.10}$$

这里极小曲线是在 Lipschitz 连续曲线 $\gamma:[0,t]\to M$ 中取的，并且可以取到。令 γ 是 (1.10) 对应的 Lipschitz 连续的极小曲线，令

$$x(s):=\gamma(s),\quad u(s):=h_{x_0,u_0}(x(s),s),\quad p(s):=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}(x(s),u(s),\dot{x}(s)).$$

那么 $(x(s),u(s),p(s))$ 在 $x(0)=x_0$, $x(t)=x$ 和 $\lim_{s\to0^-}u(s)=u_0$ 下满足方程 (1.9).

我们称函数 $(x_0,u_0,x,t)\mapsto h_{x_0,u_0}(x,t)$ 为隐式的作用量函数。下面列举隐式作用量函数 $h_{x_0,u_0}(x,t)$ 的若干有用性质。

引理 1.6 (单调性 I)[58]**.** 对于任意给定的 $x_0\in M$ 以及 $u_1,u_2\in\mathbb{R}$，有

$$u_1<u_2\Rightarrow h_{x_0,u_1}(x,t)<h_{x_0,u_2}(x,t),\quad \forall (x,t)\in M\times(0,+\infty).$$

引理 1.7 (单调性 II)[59]**.** 给定两个满足性质 1.9-1.11 的 Lagrange 函数 L_1 和 L_2, $x_0\in M$ 以及 $u_0\in\mathbb{R}$, 如果 $L_1<L_2$，那么对于所有 $(x,t)\in M\times(0,+\infty)$，$h^{L_1}_{x_0,u_0}(x,t)<h^{L_2}_{x_0,u_0}(x,t)$，其中 $h^{L_i}_{x_0,u_0}(x,t)$ 表示关于 L_i 的隐式作用量函数，$i=1,2$.

引理 1.8 (Markov 性质)[58]**.** 对于任意给定的 $x_0\in M$ 和 $u_0\in\mathbb{R}$，有

$$h_{x_0,u_0}(x,t+s)=\inf_{y\in M}h_{y,h_{x_0,u_0}(y,t)}(x,s),\quad \forall t,\ s>0,\quad \forall x\in M.$$

此外，极小在 y 取到当且仅当存在 $h_{x_0,u_0}(x,t+s)$ 的极小曲线 γ 满足 $\gamma(t)=y$.

引理 1.9 (局部 Lipschitz 连续)[59]**.** 给定 $a,b,\delta,T\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$ 和 $0<\delta<T$，函数 $(x_0,u_0,x,t)\mapsto h_{x_0,u_0}(x,t)$ 在 $\Omega_{a,b,\delta,T}$ 上 Lipschitz 连续，其中

$$\Omega_{a,b,\delta,T}:=M\times[a,b]\times M\times[\delta,T].\tag{1.11}$$

对于 $c\in\mathbb{R}$，既然 $L+c$ 满足关于 L 的所有条件，上面基于 L 得到的所有结论对于 $L+c$ 依然成立。记 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 是 $L+c$ 对应的隐式作用量函数。

引理 1.10 (单调性 III)[59]**.** 给定 $x_0\in M$, $u_0\in\mathbb{R}$ 以及 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$，如果 $c_1<c_2$，那么对于所有 $(x,t)\in M\times(0,+\infty)$，有 $h^{c_1}_{x_0,u_0}(x,t)<h^{c_2}_{x_0,u_0}(x,t)$.

引理 1.11 [59] 给定 $a,b,\delta,T\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$ 和 $0<\delta<T$，对于所有 $(x_0,u_0,x,t)\in\Omega_{a,b,\delta,T}$ 和 c_1, $c_2\in\mathbb{R}$，有

$$|h^{c_1}_{x_0,u_0}(x,t)-h^{c_2}_{x_0,u_0}(x,t)|\le e^{\lambda t}t|c_1-c_2|\le e^{\lambda T}T|c_1-c_2|,$$

其中 λ 是性质 1.11 中给出的常数。

定理 1.19 (解半群)[59]. 定义隐式半群 $\{T^-_t\}_{t\ge0}:C(M)\to C(M)$ 为

$$T^-_t\varphi(x)=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T^-_\tau\varphi(\gamma(\tau)))\mathrm{d}\tau\right\},$$

其中极小在满足 $\gamma(t)=x$ 的 Lipschitz 连续曲线 $\gamma:[0,t]\to M$ 上取，并且可以取得。对于任意 $\varphi\in C(M)$，函数 $(x,t)\mapsto T^-_t\varphi(x)$ 是演化方程 (1.3) 在初值条件 $u(x,0)=\varphi(x)$ 下的唯一粘性解。此外，

$$T^-_t\varphi(x)=\inf_{y\in M}h_{y,\varphi(y)}(x,t),\quad \forall (x,t)\in M\times[0,+\infty),$$

其中 h 是定理 1.18 中定义的隐式作用量函数。

引理 1.12 [59] 给定 $\varphi,\psi\in C(M,\mathbb{R})$，有

(1) 如果 $\varphi < \psi$，那么对于 $t \geq 0$，有 $T_t^- \varphi < T_t^- \psi$.

(2) 函数 $(x,t) \mapsto T_t^- \varphi(x)$ 在 $M \times (0,+\infty)$ 上局部 Lipschitz 连续。

类似于定义 1.5，我们定义 (1.2) 的弱 KAM 解。

定义 1.16 函数 $u \in C(M)$ 被称为 (1.2) 的负向 (resp. 正向) 弱 KAM 解，如果

(i) 对所有分段 C^1 的曲线 $\gamma : [t_1, t_2] \to M$，有

$$u(\gamma(t_2)) - u(\gamma(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u(\gamma(s)))ds.$$

(ii) 对每个 $x \in M$，存在 C^1 曲线 $\gamma : (-\infty, 0] \to M$ (resp. $\gamma : [0,+\infty) \to M$) 满足 $\gamma(0) = x$ 使得

$$u(x) - u(\gamma(t)) = \int_t^0 L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u(\gamma(s)))ds, \quad \forall t < 0.$$

(resp.

$$u(\gamma(t)) - u(x) = \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u(\gamma(s)))ds, \quad \forall t > 0).$$

与命题 1.4 和 1.5 相类似地，我们可以证明方程 (1.2) 的负向弱 KAM 解和粘性解等价，并且是半群 T_t^- 的不动点[60]。

1.5 证明难点与本文结构

在本文中，我们将在一般的偏微分方程假设下考虑接触型 Hamilton-Jacobi 方程，即假设 $H(x,p,u)$ 满足第 1.1 小节中提到的性质 1.1-1.4. 在 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解理论中，粘性解的存在性由 Perron 方法保证，唯一性由比较原理保证。这两者都需要方程关于未知函数的单调递增性质。本课题试图突破方程关于未知函数单调依赖这一假设，在非单调的框架下给出相应的解半群，并且利用解半群研究定态方程解集的结构和演化方程解的长期行为。证明的难点在于：

- 本文在 Hamilton 函数仅仅连续的假设下考虑接触型 Hamilton-Jacobi 方程。对比 Tonelli 条件下已有的结果，此时接触 Hamilton 方程 (1.9) 不能定义。因此，对于极小轨道，我们不能通过动力学的方法得到相应的紧性。而这类紧性在以前的工作中是关键的步骤，见 [59] 引理 2.1. 特别地，此时半群的极小曲线将没有 C^1 的正则性。因此，我们将结合一维变分学的方法与偏微分方程的方法进行分析。

- 对比不显含未知函数，但是 Hamilton 函数连续的情形[39,66]，Lagrange 函数 $\bar{L}(x,\dot{x},t) := L(x,\dot{x},u(x,t))$ 是非自治的，其中 $u(x,t)$ 是 (1.3) 的粘性解。由于 Lavrentiev 现象[67]，证明 $T_t^- \varphi(x)$ 极小曲线的 Lipschitz 连续性是困难的。这里极小曲线 Lipschitz 连续性的证明主要基于 P. Bettlol 和 C. Mariconda 近期的工作，见附录 A。

在 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的经典理论中，成熟的方法需要 Hamilton 函数满足一个“恰当的”条件，即关于未知函数单调递增。这里我们进一步考虑了关于未知函数单调递减，以及非单调的情形，给出了定态方程的解的存在性、解集的结构，以及演化方程的长期行为的细致刻画。此外，本文应用这些结论，突破了弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组中的单调性假设，给出方程组粘性解的一个新的存在性定理。本文的结构如下：

- 在第 2 章，我们考虑 $H(x,p,u)$ 关于 u 一致 Lipschitz 的情形，得到若干关于一般接触型 Hamilton-Jacobi 方程的结论，包括类似于定理 1.19 给出的隐式半群表示，(1.2) 粘性解存在的一个充分条件，以及关于 (1.2) 特定粘性解 u_- 的投影 Aubry 集的概念。基于给出的隐式半群，我们可以进一步研究定态方程的解的存在性、解集的结构，以及演化方程的长期行为。

- 在第 3 章，我们将第 2 章得到的结论应用于 $H(x,p,u)$ 关于 u 单调递增和单调递减的情形。对于单调递增情形，我们定义了投影 Aubry 集与共轭对，并且刻画了 (1.2) 粘性解集合的结构。对于单调递减情形，我们得到了 (1.2) 粘性解集合的若干性质，包括 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}}$ 意义下的一致有界性，以及关于 Aubry 集邻域的比较定理。此外，我们详细刻画了 (1.3) 粘性解的长期行为。

- 在第 4 章，我们将第 2 章得到的结论应用于 $H(x,p,u)$ 关于 u 非单调的情形，包括 $H(x,p,u)$ 对 u 周期依赖，以及广义打折 Hamilton 函数 $H(x,p,u)=\lambda(x)u+G(x,p)$ 打折项系数 $\lambda(x)$ 变号的情形。

- 在第 5 章，我们将第 3 章得到的结论应用于耦合的非线性方程组，包括弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组，以及多参与者的平均场博弈模型。

- 在第 6 章，我们给出两个有待探索的研究对象：(1) 弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组；(2) 带粘性项的二阶 Hamilton-Jacobi 方程。

本文通过研究不满足“恰当”条件的 Hamilton-Jacobi 方程，在理论上揭示了接触型 Hamilton-Jacobi 方程、接触 Hamilton 系统与不显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程、经典的 Hamilton 系统之间的本质区别。从物理的角度来看，在反应-扩散系统中，关于未知函数的不同依赖性体现出系统内在的耗散与激励效应。本文得到的这些结论在反应-扩散方程，以及微分博弈方面也有潜在的实际应用。

第 2 章　一般理论

2.1　主要结论

本章的主要目的在于削弱 $H(x,u,p)$ 的正则性要求，此时接触 Hamilton 方程不能被定义。在本文中，我们假设接触 Hamilton 函数 $H : T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 1.1 小节给出的性质 1.1-1.4. 定义相应的 Lagrange 函数

$$L(x,\dot{x},u) := \sup_{p\in T_x^*M}(\langle\dot{x},p\rangle - H(x,p,u))$$

由于 $H(x,p,u)$ 关于 p 只是强制增长的，$L(x,\dot{x},u)$ 可能取值为 $+\infty$. 它的定义域为

$$\mathrm{dom}(L) := \{(x,\dot{x},u)\in TM\times\mathbb{R} \mid L(x,u,\dot{x})<+\infty\}.$$

参照 [39] 的命题 2.7，可以证明相应的 Lagrange 函数

$$L(x,\dot{x},u) := \sup_{p\in T_x^*M}(\langle\dot{x},p\rangle - H(x,p,u))$$

满足下列性质：

性质 2.1 $L(x,\dot{x},u)$ 关于 $\dot{x}$ 下半连续，并且在 $\mathrm{dom}(L)$ 的内部连续。

性质 2.2 $L(x,\dot{x},u)$ 对 $\dot{x}$ 凸，for any $(x,u)\in M\times\mathbb{R}$.

性质 2.3 一致 Lipschitz：存在 $\lambda>0$ 使得 $|L(x,\dot{x},u)-L(x,\dot{x},v)|\le\lambda|u-v|$ 对所有 $(x,\dot{x})\in TM$ 和 $u,v\in\mathbb{R}$ 成立。

性质 1.2 等价于下面论述：对每个 $R>0$，存在 $K>0$ 使得对于任意 $|u|<R$ 和 $\|p\|>K$，有 $H(x,p,u)>R$. 实际上，根据性质 1.2，对每个 $R>0$，存在 $K>0$ 使得对于 $\|p\|>K$，有 $H(x,p,0)>(1+\lambda)R$. 根据性质 1.3，对 $|u|<R$ 有

$$H(x,p,u)\ge H(x,p,0)-\lambda|u|>R.$$

此外，定义域 $\mathrm{dom}(L)$ 与 u 无关。具体来说，对于 $(x,\dot{x})\in TM$，如果对于给定的 $u_0\in\mathbb{R}$ 有 $L(x,\dot{x},u_0)<+\infty$，那么对所有 $u\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}L(x,\dot{x},u)\le&\sup_{p\in T_x^*M}\{\langle\dot{x},p\rangle-H(x,p,u_0)\}+\lambda|u-u_0|\\=&L(x,\dot{x},u_0)+\lambda|u-u_0|<+\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{dom}(L)=\{(x,\dot{x})\in TM \mid L(x,\dot{x},0)<+\infty)\}\times\mathbb{R}.$$

2.1.1 隐式半群表示

我们首先考虑下面 Cauchy 问题的粘性解

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in M \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in M \end{cases} \tag{2.1}$$

定理 2.1 假设 $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4，那么下面的负向解半群算子

$$T_t^- \varphi(x) = \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^- \varphi(\gamma(\tau)))\mathrm{d}\tau \right\}, \tag{2.2}$$

是良定义的，它的极小曲线在满足 $\gamma(t) = x$ 的绝对连续曲线类中取得。此外

(i) 如果初值 φ 是连续的，那么 $u(x,t) = T_t^- \varphi(x)$ 表示 (2.1) 的唯一连续粘性解。

(ii) 如果 φ 是 Lipschitz 的，那么 $u(x,t) = T_t^- \varphi(x)$ 在 $M \times [0,+\infty)$ 上 Lipschitz 连续。

定义 2.1 定义正向半群

$$T_t^+ \varphi(x) = \sup_{\gamma(0)=x} \left\{ \varphi(\gamma(t)) - \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_{t-\tau}^+ \varphi(\gamma(\tau)))d\tau \right\}. \tag{2.3}$$

经过与 [60] 命题 2.8 类似的讨论，我们可以得到 $T_t^+\varphi := -\bar{T}_t^-(-\varphi)$，其中 $\bar{T}_t^-$ 是 $L(x, -\dot x, -u)$ 对应的负向隐式半群。

根据定理 2.1，如果 T_t^- 存在不动点，那么它们是方程 (1.2) 的粘性解。

2.1.2 定态方程解的存在性

方程 (1.2) 的粘性解的存在性由定理 1.1 保证。而应用这个定理，我们需要构造具有序关系的粘性上解和粘性下解。在本小节，我们给出 (1.2) 粘性解存在性的另一个充分条件。

定理 2.2 假设 $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4 那么下面叙述等价

(1) (1.2) 粘性解存在；

(2) 存在两个连续函数 φ 和 ψ，其中 $T_t^-\varphi$ 有无关于 t 的下界，$T_t^-\psi$ 有无关于 t 的上界；

(3) 存在两个连续函数 φ 和 ψ，以及 t_1 和 $t_2 > 0$ 满足 $T_{t_1}^-\varphi \geq \varphi$ 以及 $T_{t_2}^-\psi \leq \psi$.

如果 (1.2) 有解 u_-，取初值函数为 u_-，显然 (2) 和 (3) 成立，我们只需要证明另一方向。值得说明的是，对比定理 1.1，这里 $T_t^-\varphi$ 的下界并不要求小于 $T_t^-\psi$ 的上界。

2.1.3 投影 Aubry 集

在性质 1.1-1.4 成立的假设下，我们定义 (1.2) 的弱 KAM 解。对比定义 1.16，由于 Hamilton 函数只是连续的，这里的校准曲线不能做到 C^1，仅仅只是绝对连续的。对于弱 KAM 解、粘性解，以及解半群算子不动点之间的等价关系，见附录 B.

定义 2.2 函数 $u \in C(M)$ 被称为 (1.2) 的负向 (resp. 正向) 弱 KAM 解，如果

(i) 对所有绝对连续曲线 $\gamma:[t_1,t_2]\to M$，有

$$u(\gamma(t_2))-u(\gamma(t_1))\le\int_{t_1}^{t_2}L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u(\gamma(s)))ds.$$

我们称 u 被 L 控制，记为 $u\prec L$.

(ii) 对每个 $x\in M$，存在绝对连续曲线 $\gamma:(-\infty,0]\to M$ (resp. $\gamma:[0,+\infty)\to M$) 满足 $\gamma(0)=x$ 使得

$$u(x)-u(\gamma(t))=\int_t^0 L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u(\gamma(s)))ds,\quad \forall t<0.$$

(resp.

$$u(\gamma(t))-u(x)=\int_0^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u(\gamma(s)))ds,\quad \forall t>0).$$

我们称这条曲线为 $(u,L,0)$-校准曲线。在本文中，我们记负向弱 KAM 解全体为 $\mathcal{S}_-$，正向弱 KAM 解全体为 $\mathcal{S}_+$.

在下面的讨论中，我们假设集合 $\mathcal{S}_-$ 非空，即 (1.2) 有解。

定义 2.3 令 $u_-\in\mathcal{S}_-$，$u_+\in\mathcal{S}_+$，我们定义关于 $u_\pm$ 的投影 Aubry 集

$$\mathcal{I}_{u_\pm}:=\{x\in M:\ u_\pm(x)=\lim_{t\to+\infty}T_t^{\mp}u_\pm(x)\}.$$

特别地，如果 $u_+(x)=\lim_{t\to+\infty}T_t^+u_-(x)$ 并且 $u_-(x)=\lim_{t\to+\infty}T_t^-u_+(x)$，那么

$$\mathcal{I}_{u_-}=\mathcal{I}_{u_+}.$$

类比 Fathi 的共轭对的概念，我们记这个集合为 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$.

定理 2.3 假设 $H:T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4，以及 $\mathcal{S}_-$ 非空。

(1) 对于 $u_-\in\mathcal{S}_-$，极限函数 $\lim_{t\to+\infty}T_t^+u_-(x)$ 存在，并且是 (1.2) 的正向弱 KAM 解。对于 $u_+\in\mathcal{S}_+$，极限函数 $\lim_{t\to+\infty}T_t^-u_+(x)$ 存在，并且是 (1.2) 的负向弱 KAM 解；

(2) 集合 $\mathcal{I}_{u_-}$ 以及 $\mathcal{I}_{u_+}$ 非空。

根据正向解半群的定义，我们只需要对 $T_t^+u_-(x)$ 以及 $\mathcal{I}_{u_-}$ 进行证明。

2.2 主要结论的证明

2.2.1 定理 2.1 的证明

- **Lipschitz 连续初值的情形.** 我们的证明结构如下

(1) 引理 2.1 的证明，以及相应的工具见附录 A.

(2) 在如下的假设下:

条件 1：对于每个 $k\in\mathbb{N}_+$，由 (2.4) 定义的 u_k 在 $M\times[0,T]$ 上连续，

基于引理 2.1，我们证明了引理 2.2(i).

(3) 在如下的假设下：

条件 2：对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$，u_k 在 $M \times (0,T]$ 上局部 Lipschitz 连续，并且是 (2.5) 的粘性解。

我们通过引理 2.2(i) 证明了引理 2.2(ii).

(4) 经过超线性的修正，我们先证明引理 2.3. 证明中需要的一维变分学的有关结论，见附录 A.

(5) 引理 2.2(ii) 中的条件 2 可以在超线性增长的假设下由引理 2.3 得到。根据引理 2.2(ii)，在超线性假设下，我们证明了定理 2.1(ii)。

(6) 在强制性增长的假设下，基于步骤 (5)，我们证明了引理 2.4.

(7) 在强制性假设下，引理 2.2(ii) 中的条件 2 可以由引理 2.4 得到。根据引理 2.2(ii), 定理 2.1(ii) 在强制性增长的假设下成立。

引理 2.1 给定 $T > 0$. 对于 $\varphi \in C(M)$, $v \in C(M \times [0,T])$ 以及 $t \in [0,T]$，泛函

$$\mathbb{L}^t(\gamma) := \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), v(\gamma(s), s))ds$$

在下面的曲线类中取得极小

$$X_t(x) = \{\gamma \in W^{1,1}([0,t], M) : \ \gamma(t) = x\}.$$

引理 2.2 给定 $T > 0$ 和 $\varphi \in C(M)$. 对于 $k \in \mathbb{N}_+$ 以及 $t \in (0,T]$，考虑下面迭代序列

$$u_k(x,t) := \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), u_{k-1}(\gamma(\tau), \tau))d\tau \right\}, \tag{2.4}$$

其中 $u_0(x,t) := \varphi(x)$.

(i) 如果对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$, u_k 在 $M \times [0,T]$ 上连续, 那么 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 对于 $(x,t) \in M \times [0,T]$ 一致收敛到 $u(x,t) := T_t^-\varphi(x)$，其中 $T_t^- : C(M) \to C(M)$ 是 (2.2) 定义的负向半群。

(ii) 令 $\varphi \in \mathrm{Lip}(M)$. 如果对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$，u_k 在 $M \times (0,T]$ 上局部 Lipschitz 连续，并且是下面方程的粘性解

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u_{k-1}(x,t)) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

那么 u_k 在 $M \times [0,T]$ 上 Lipschitz 连续, 并且它的 Lipschitz 常数仅依赖于 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_\infty$ 和 $\|D\varphi\|_\infty$. 此外，极限函数 $u(x,t) := T_t^-\varphi$ 也是 Lipschitz 连续的。

证明 陈述 (i) 的证明：根据引理 2.1，每个 u_k 的极小曲线都存在。首先，令 $\gamma_1 : [0,t] \to M$ 是 $u_1(x,t)$ 的极小曲线，那么

$$\begin{aligned} u_2(x,t) - u_1(x,t) &\le \int_0^t \Big[L(\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s), u_1(\gamma_1(s), s)) - L(\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s), \varphi(\gamma_1(s))) \Big] ds \\ &\le \lambda \|u_1 - \varphi\|_\infty t. \end{aligned}$$

交换 u_2 和 u_1，有

$$|u_2(x,t)-u_1(x,t)| \le \lambda \|u_1-\varphi\|_\infty t.$$

令 $\gamma_2:[0,t]\to M$ 是 $u_2(x,t)$ 的极小曲线，那么

$$\begin{aligned}
u_3(x,t)-u_2(x,t) &\le \int_0^t \Big[L(\gamma_2(s),\dot\gamma_2(s),u_2(\gamma_2(s),s)) - L(\gamma_2(s),\dot\gamma_2(s),u_1(\gamma_2(s),s))\Big]ds\\
&\le \lambda\int_0^t |u_2(\gamma_2(s),s)-u_1(\gamma_2(s),s)|ds \le \lambda\int_0^t \lambda\|u_1-\varphi\|_\infty s ds\\
&= \frac{(\lambda t)^2}{2}\|u_1-\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

交换 u_3 和 u_2，得到

$$|u_2(x,t)-u_1(x,t)| \le \frac{(\lambda t)^2}{2}\|u_1-\varphi\|_\infty.$$

继续这个步骤，我们最终得到

$$\|u_{j+1}-u_j\|_\infty \le \frac{(\lambda T)^j}{j!}\|u_1-\varphi\|_\infty,$$

对每个 $j\in\mathbb{N}$ 成立。因此

$$\|u_k-\varphi\|_\infty \le \sum_{j=0}^{k-1}\|u_{j+1}-u_j\|_\infty \le \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda T)^j}{j!}\|u_1-\varphi\|_\infty \le e^{\lambda T}\|u_1-\varphi\|_\infty, \quad \forall k\in\mathbb{N}_+.$$

对于 $k_1>k_2$, we have

$$\|u_{k_1}-u_{k_2}\|_\infty \le \frac{(\lambda T)^{k_2}}{k_2!}\|u_{k_1-k_2}-\varphi\|_\infty \le \frac{(\lambda T)^{k_2}}{k_2!}e^{\lambda T}\|u_1-\varphi\|_\infty.$$

注意到 $(\lambda T)^k/k!$ 在 $k\to\infty$ 时趋于零，在 k_2 足够大时上式右端可以任意小。因此序列 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Banach 空间 $(C(M\times[0,T]),\|\cdot\|_\infty)$ 中的 Cauchy 列。故 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到某个连续函数 $u(x,t)$. 定义算子 $\mathbb{A}_\varphi: C(M\times[0,T])\to C(M\times[0,T])$ 为

$$\mathbb{A}_\varphi[u](x,t) := \inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),u(\gamma(\tau),\tau))d\tau\right\}.$$

那么极限函数 $u(x,t)$ 满足

$$\|\mathbb{A}_\varphi[u]-u\|_\infty \le \|\mathbb{A}_\varphi[u]-u_k\|_\infty + \|u_k-u\|_\infty \le \lambda T\|u-u_{k-1}\|_\infty + \|u_k-u\|_\infty.$$

令 $k\to+\infty$ 得到 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{A}_\varphi$ 的唯一不动点。即极限函数 $u(x,t):=T_t^-\varphi$. 算子 T_t^- 的半群性质可以由 [68] 命题 3.3 的类似讨论得到。

陈述 (ii) 的证明：根据陈述 (i)，序列 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 一致收敛，因此

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k(x,t)\|_\infty < +\infty.$$

定义

$$K_1 := \max\{|H(x,u,p)|:\ x\in M,\ |u|\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k(x,t)\|_\infty,\ \|p\|\le\|D\varphi(x)\|_\infty\},$$

以及
$$K_2 := \min\{H(x,u,p):\ (x,p)\in T^*M,\ |u|\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k(x,t)\|_\infty\}.$$
我们采用归纳法证明
$$\|\partial_t u_k(\cdot,t)\|_\infty \le \max\{K_1 e^{\lambda t}, |K_2|\} \tag{2.6}$$
对于每个 $k\in\mathbb{N}_+$ 成立。

首先，考虑 $k=1$. 定义
$$K_0 := \max\{|H(x,p,u)|:\ x\in M,\ |u|\le \|\varphi(x)\|_\infty,\ \|p\|\le\|D\varphi(x)\|_\infty\}.$$
对于任意 $h>0$，定义
$$w(x,t) := \begin{cases}\varphi(x)-K_0 t, & t\le h,\\ u_k(x,t-h)-K_0 h, & t>h.\end{cases} \tag{2.7}$$
首先，Lipschitz 连续的函数 $(x,t)\mapsto\varphi(x)-K_0 t$ 几乎处处满足
$$\partial_t u + H(x,Du,\varphi(x))\le 0. \tag{2.8}$$
根据 [49] 推论 8.3.4，当 $t\le h$，$w(x,t)$ 是 (2.8) 的粘性下解。同时，对于 $t>h$，$w(x,t)$ 也满足 (2.8). 因此，$w(x,t)$ 是 (2.8) 在初值 $w(x,0)=\varphi(x)$ 下的一个连续粘性下解。根据比较定理（见 [7] 定理 5.1），由于函数 $(x,t)\mapsto\varphi(x)-K_0 t$ 关于 x 是 Lipschitz 连续的，有
$$w(x,h)=\varphi(x)-K_0 h\le u_1(x,h).$$
注意到 $u_1(x,t)$ 在 $M\times[h,T]$ 上是 Lipschitz 连续的，有
$$u_1(x,t)-K_0 h = w(x,t+h)\le u_1(x,t+h),\quad \forall t\ge 0,\ h>0.$$
令 $h\to 0^+$，我们得到 $\partial_t u_1(x,t)\ge -K_0\ge -K_1$. 同时我们有
$$\partial_t u_1(x,t) = -H(x,Du_1(x,t),\varphi(x))\le |K_2|.$$
因此 (2.6) 对于 $k=1$ 成立。

现在我们假设 (2.6) 对于 $k-1$ 成立。对任意 $h>0$，定义
$$\bar{w}(x,t) := \begin{cases}\varphi(x)-K_1 e^{\lambda h} t, & t\le h,\\ u_k(x,t-h)-K_1 h e^{\lambda t}, & t>h.\end{cases} \tag{2.9}$$
首先，Lipschitz 连续函数 $(x,t)\mapsto\varphi(x)-K_1 e^{\lambda h} t$ 几乎处处满足
$$\partial_t u + H(x,Du,u_{k-1}(x,t))\le 0.$$
从而 $\bar{w}(x,t)$ 在 $t\le h$ 的时候是 (2.5) 的粘性下解。对于 $t>h$，我们有
$$\begin{aligned}&\partial_t\bar{w}(x,t)+H(x,D\bar{w}(x,t),u_{k-1}(x,t))\\ &=\partial_t u_k(x,t-h)-K_1 h\lambda e^{\lambda t}+H(x,Du_k(x,t-h),u_{k-1}(x,t))\\ &\le \partial_t u_k(x,t-h)-\lambda\sup_{s\in[t-h,t]}\|\partial_t u_{k-1}(\cdot,s)\|_\infty h + H(x,Du_k(x,t-h),u_{k-1}(x,t))\\ &\le \partial_t u_k(x,t-h)+H(x,Du_k(x,t-h),u_{k-1}(x,t-h))=0.\end{aligned}$$

根据比较定理，由于 $(x,t)\mapsto \varphi(x)-K_1e^{\lambda h}t$ 关于 x 是 Lipschitz 连续的，我们有

$$\bar{w}(x,h)=\varphi(x)-K_1he^{\lambda h}\le u_k(x,h).$$

注意到 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[h,T]$ 上是 Lipschitz 连续的，有

$$u_k(x,t)-K_1he^{\lambda(t+h)}=\bar{w}(x,t+h)\le u_k(x,t+h),\quad \forall t\ge 0,\ h>0.$$

令 $h\to 0^+$，有 $\partial_t u_k(x,t)\ge -K_1e^{\lambda t}$. 同时我们有

$$\partial_t u_k(x,t)=-H(x,Du_k(x,t),u_{k-1}(x,t))\le |K_2|.$$

我们最终得到 (2.6) 对于每个 k 成立。带入 (2.5)，得到

$$H(x,Du_k(x,t),0)\le \max\{K_1e^{\lambda T},|K_2|\}+\lambda\|u_{k-1}(x,t)\|_\infty.$$

因此根据强制性增长的性质 1.2，$\|Du_k(x,t)\|_\infty$ 在 $M\times[0,T]$ 上是有界的。这说明 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上 Lipschitz 连续，并且 Lipschitz 常数只与 $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k(x,t)\|_\infty$ 和 $\|D\varphi(x)\|_\infty$ 有关。此外，序列 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是关于 k 等度 Lipschitz 连续的。从而极限函数 $u(x,t):=T_t^-\varphi$ 是 Lipschitz 连续的。 ∎

接下来我们将证明分为两步。第一步，我们假设 $H(,p,u)$ 关于 p 超线性增长，第二步，我们再将条件弱化为 $H(,p,u)$ 关于 p 强制性增长。

第一步. 假设 Hamilton 函数 $H:T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足性质 1.1, 1.3, 1.4 以及

性质 2.4 对于 $(x,u)\in M\times\mathbb{R}$，$H(x,p,u)$ 关于 p 超线性增长，即存在函数 $\Theta:[0+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\Theta(r)}{r}=+\infty,\quad \text{and}\quad H(x,p,u)\ge\Theta(\|p\|)\quad \text{for every } (x,p,u)\in T^*M\times\mathbb{R}.$$

相应的 Lagrange 函数满足性质 2.2, 2.3 以及

性质 2.5 $L(x,u,\dot{x})$ 是连续的。

性质 2.6 对于 $(x,u)\in M\times\mathbb{R}$，$L(x,\dot{x},u)$ 关于 $\dot{x}$ 超线性增长，即存在函数 $\Theta:[0+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\Theta(r)}{r}=+\infty,\quad \text{and}\quad L(x,\dot{x},u)\ge\Theta(\|\dot{x}\|)\quad \text{for every } (x,\dot{x},u)\in TM\times\mathbb{R}.$$

引理 2.3 给定 $T>0$ 以及 $\varphi\in C(M)$，如果 $v(x,t)$ 是 $M\times[0,T]$ 上的 Lipschitz 连续函数，那么

(1) 对于 $(x,t)\in M\times[0,T]$，下面定义的值函数

$$u(x,t):=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),v(\gamma(\tau),\tau))d\tau\right\}\tag{2.10}$$

的极小曲线是 Lipschitz 连续的。对任意 $r>0$，如果 $d(x,x')\le r$ 并且 $|t-t'|\le r/2$，其中 $t\ge r>0$，那么 $u(x',t')$ 的极小曲线的 Lipschitz 常数仅与 (x,t) 和 r 有关。

(2) 由 (2.10) 定义的值函数 $u(x,t)$ 在 $M\times(0,T]$ 上是局部 Lipschitz 连续的。

(3) 函数 $u(x,t)$ 也是

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)+H(x,Du(x,t),v(x,t))=0,\\ u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}\tag{2.11}$$

在 $M\times[0,T]$ 上的粘性解。

证明 我们首先证明陈述 (1). 根据性质 1.3 以及 $v(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上的 Lipschitz 连续性，对于 $\tau\in[0,t]$，映射 $s\mapsto L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),v(\gamma(\tau),s))$ 满足条件 ($\diamond$)，其中 $k\equiv\lambda\|\partial_t v(x,t)\|_\infty$. 根据 A.5，对于每个 $(x,t)\in M\times[0,T]$，值函数 $u(x,t)$ 的极小曲线是 Lipschitz 连续的。但是，它们的 Lipschitz 常数与终点 (x,t) 有关。我们需要证明对于 (x,t) 附近的 (x',t')，$u(x',t')$ 的极小曲线的 Lipschitz 常数与 (x',t') 无关。

对于任意 $r>0$，如果 $d(x,x')\le r$ 并且 $|t-t'|\le r/2$，其中 $t\ge r>0$，我们记 $u(x,t)$ 和 $u(x',t')$ 的极小曲线分别为 $\gamma(s;x,t)$ 和 $\gamma(s;x',t')$. 我们有

$$\begin{aligned}u(x',t')=&\varphi(\gamma(0;x',t'))+\int_0^{t'}L(\gamma(s;x',t'),\dot\gamma(s;x',t'),v(\gamma(s;x',t'),s))ds\\ \le&\varphi(\gamma(0;x,t))+\int_0^{t-r}L(\gamma(s;x,t),\dot\gamma(s;x,t),v(\gamma(s;x,t),s))ds\\ &+\int_{t-r}^{t'}L(\alpha(s),\dot\alpha(s),v(\alpha(s),s))ds,\end{aligned}$$

其中 $\alpha:[t-r,t']\to M$ 是连接 $\gamma(t-r;x,t)$ 和 x' 的常速测地线。注意到

$$\|\dot\alpha\|\le\frac{1}{t'-(t-r)}\big(d(\gamma(t-r;x,t),x)+d(x,x')\big)\le 2\left(\frac{1}{r}\int_{t-r}^{t}\|\dot\gamma(s;x,t)\|ds+1\right),$$

我们得到

$$\int_0^{t'}L(\gamma(s;x',t'),\dot\gamma(s;x',t'),v(\gamma(s;x',t'),s))ds$$

有仅依赖于 (x,t) 和 r 的界。由性质 2.6，存在常数 $M(x,t,r)>0$ 使得

$$\int_0^{t'}\|\dot\gamma(s;x',t')\|ds\le M(x,t,r),$$

其中 $t'\ge t-r/2>0$. 这说明 $\|\dot\gamma(s;x',t')\|$ 是等度可积的。因此，对于 (x,t) 附近的 (x',t')，存在常数 $R(x,t,r)>0$ 和 $s_0\in[0,t']$ 使得 $\|\dot\gamma(s_0;x',t')\|\le R(x,t,r)$. 由引理 A.4，存在绝对连续函数 $p(t;x',t')$ 满足 $|p'(t;x',t')|\le\lambda\|\partial_t v(x,t)\|_\infty$ 使得

$$\begin{aligned}&L(\gamma(s;x',t'),\frac{\dot\gamma(s;x',t')}{\theta},v(\gamma(s;x',t'),s))\theta\\ &\quad-L(\gamma(s;x',t'),\dot\gamma(s;x',t'),v(\gamma(s;x',t'),s))\ge p(s;x',t')(\theta-1),\quad\forall\theta>0.\end{aligned}$$

取 $\theta=2$ 和 $t=s_0$，我们得到 $p(s_0)$ 的上界，取 $\theta=1/2$ 和 $t=s_0$，我们得到 $p(s_0)$ 的下界。注意到 $p'(t)$ 是有界的。我们最终得到 $\|p(t)\|_\infty$ 是有界的，并且界与 (x',t') 无关。既然 $L(x,u,\dot x)$ 满足性质 2.6，根据引理 A.5 同时取 $\rho=1$，我们得到

$$L(\gamma(s;x',t'),\frac{\dot\gamma(s;x',t')}{\|\dot\gamma(s;x',t')\|},v(\gamma(s;x',t'),s))\ge\frac{\Theta(\|\dot\gamma(s;x',t')\|)}{\|\dot\gamma(s;x',t')\|}-\|p(s;x',t')\|_\infty.$$

因此，对于足够接近 (x,t) 的 (x',t')，极小曲线 $\gamma(s;x',t')$ 的 Lipschitz 常数与 (x',t') 无关。

现在我们证明陈述 (2). 我们首先证明 $u(x,t)$ 关于 x 局部 Lipschitz 连续。对任意 $\delta>0$，固定 $(x_0,t)\in M\times[\delta,T]$ 以及 $x,x'\in B(x_0,\delta/2)$. 我们记 $d_0=d(x,x')\le\delta$ 是 x 和 x' 之间的黎曼度量诱导的距离。那么

$$
\begin{aligned}
u(x',t)-u(x,t)\le&\int_{t-d_0}^{t}L(\alpha(s),\dot\alpha(s),v(\alpha(s),s))ds\\
&-\int_{t-d_0}^{t}L(\gamma(s;x,t),\dot\gamma(s;x,t),v(\gamma(s;x,t),s))ds,
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma(s;x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的极小曲线，同时 $\alpha:[t-d_0,t]\to M$ 是连接 $\gamma(t-d_0;x,t)$ 和 x' 的常速测地线。根据引理 2.3 (1)，如果 $x\in B(x_0,\delta/2)$，$\|\dot\gamma(s;x,t)\|$ 的界仅与 x_0 和 δ 有关。注意到

$$
\|\dot\alpha(s)\|\le\frac{d(\gamma(t-d_0;x,t),x')}{d_0}\le\frac{d(\gamma(t-d_0;x,t),x)}{d_0}+1,
$$

以及

$$
d(\gamma(t-d_0;x,t),x)\le\int_{t-d_0}^{t}\|\dot\gamma(s;x,t)\|ds,
$$

故 $\|\dot\alpha(s)\|$ 的界仅与 x_0 和 δ 有关。交换 (x,t) 和 (x',t)，我们得到

$$
|u(x,t)-u(x',t)|\le J_1d(x,x'),
$$

其中 J_1 仅与 x_0 和 δ 有关。由于 M 是紧致流形，对于 $t\in(0,T]$，值函数 $u(\cdot,t)$ 在 M 上 Lipschitz 连续。

现在我们证明值函数 $u(x,t)$ 关于 t 局部 Lipschitz 连续。给定 $t_0\ge 3\delta/2$ 和 $t,t'\in[t_0-\delta/2,t_0+\delta/2]$. 我们不妨假设 $t'>t$. 那么

$$
\begin{aligned}
u(x,t')-u(x,t)\le&u(\gamma(t;x,t'),t)-u(x,t)\\
&+\int_{t}^{t'}L(\gamma(s;x,t'),\dot\gamma(s;x,t'),v(\gamma(s;x,t'),s))ds,
\end{aligned}
$$

其中 $\|\dot\gamma(s;x,t')\|$ 的界仅与 t_0 和 δ 有关。我们已经证明了对于 $t\ge\delta$，有如下结论

$$
u(\gamma(t;x,t'),t)-u(x,t)\le J_1d(\gamma(t;x,t'),x)\le J_1\int_{t}^{t'}\|\dot\gamma(s;x,t')\|ds\le J_2(t'-t).
$$

因此，$u(x,t')-u(x,t)\le J_3(t'-t)$，其中 J_3 仅与 t_0 和 δ 有关。情况 $t'<t$ 是类似的。从而我们证明了 $u(x,\cdot)$ 在 $(0,T]$ 上关于 t 是局部 Lipschitz 连续的。

最后，我们证明陈述 (3). 我们首先证明在 $t=0$ 的时候 $u(x,t)$ 是连续的。对于每个 $\varphi\in C(M)$，存在一列函数 $\varphi_m\in\mathrm{Lip}(M)$ 一致收敛到 φ. 我们取 φ 和 φ_m 作为 (2.10) 中的初值函数，并且将相应的值函数记为 $u(x,t)$ 以及 $u_m(x,t)$. 由于 $v(x,t)$ 是固定的，根据 Lax-Oleinik 半群的非扩张性质，我们有 $\|u(x,t)-u_m(x,t)\|_\infty\le\|\varphi-\varphi_m\|_\infty$. 因此，不失一般性，我们在接下来的讨论中假设初值是 Lipschitz 连续的。取常数曲线 $\alpha(t)\equiv x$. 令 $\gamma:[0,t]\to M$ 是 $u(x,t)$ 的极小曲线。显然

$$
u(x,t)=\varphi(\gamma(0))+\int_0^tL(\gamma(s),\dot\gamma(s),v(\gamma(s),s))ds\le\varphi(x)+\int_0^tL(x,0,v(x,s))ds,
$$

因此 $\limsup_{t\to 0^+} u(x,t) \le \varphi(x)$. 根据性质 2.6，存在常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),v(\gamma(\tau),\tau))d\tau &\ge \int_0^t \|D\varphi\|_\infty \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau + Ct\\ &\ge \|D\varphi\|_\infty d(\gamma(0),\gamma(t)) + Ct,\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),v(\gamma(\tau),\tau))d\tau + \varphi(\gamma(0)) \ge \varphi(x) + Ct.$$

因此 $\liminf_{t\to 0^+} u(x,t) \ge \varphi(x)$. 结合引理 2.3 (2)，$u(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上连续。

由于极小曲线 Lipschitz 连续，根据经典的方法，我们可以证明 $u(x,t)$ 是 (2.11) 的粘性解。我们在这里略去。 ∎

基于引理 2.3，我们在超线性增长的假设下证明了定理 2.1 (ii). 实际上，在迭代过程 (2.4) 中令 $u_0 := \varphi \in \mathrm{Lip}(M)$. 由引理 2.2(i)，序列 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上一致收敛于 $u(x,t) := T_t^-\varphi(x)$. 由引理 2.3 (2) 和 (3)，值函数 $u_1(x,t)$ 满足引理 2.2 (ii) 需要的条件，因此 u_1 在 $M\times[0,T]$ 上 Lipschitz 连续。重复这一讨论，我们得到 u_k 是 (2.5) 的 Lipschitz 连续的粘性解。由引理 2.2 (ii)，值函数 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上的 Lipschitz 常数关于 k 是一致的。由于 $H_k(t,x,p) := H(x,u_k(x,t),p)$ 在 $\mathbb{R}\times T^*M$ 的紧子集上一致收敛，并且 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上一致收敛，故负向半群 $u(x,t) := T_t^-\varphi(x)$ 作为序列 $u_k(x,t)$ 的一致极限，由粘性解的稳定性，是 (2.1) 的 Lipschitz 连续的粘性解。

第二步. 现在我们假设 Hamilton 函数 $H: T^*M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4. 由引理 2.1，极小曲线是存在的。为了得到 (2.4) 中定义的 u_k 的 Lipschitz 连续性，我们做下面修正

$$H_n(x,p,u) := H(x,p,u) + \max\{\|p\|^2 - n^2, 0\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

显然 H_n 关于 p 是超线性增长的。序列 H_n 是单调递减的，并且在 $T^*M\times\mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛到 H. 相应的 Lagrange 函数序列 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的，点点收敛于 L. 我们记 $u_{n,k}(x,t)$ 是 (2.5) 中 H 换成 H_n 的粘性解。

引理 2.4 令 H 满足性质 1.1-1.4，L 是相应的 Lagrange 函数。给定 $\varphi\in\mathrm{Lip}(M)$, 对于每个 $k\in\mathbb{N}$，由 (2.4) 定义的函数 $u_k(x,t)$ 是 (2.5) 的 Lipschitz 连续的粘性解。

证明 令 $n\in\mathbb{N}$，考虑下面的迭代序列

$$u_{n,k}(x,t) := \inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L_n(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),u_{n,k-1}(\gamma(\tau),\tau))d\tau\right\},\tag{2.12}$$

其中 $u_{n,0} := \varphi\in\mathrm{Lip}(M)$. 我们首先利用归纳法证明下面断言：

A[k]: 给定 $k\in\mathbb{N}$. 序列 $\{u_{n,k}(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 n 是一致有界等度 Lipschitz 的，并且在 $M\times[0,T]$ 上一致收敛于 $u_k(x,t)$. 此外，极限函数 $u_k(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的。

我们首先证明断言 A[1] 成立。根据 H_n 的定义，对于 $n\ge\|D\varphi(x)\|_\infty$，

$$K_0^n := \max\{|H_n(x,p,u)|:\ x\in M,\ |u|\le\|\varphi(x)\|_\infty,\ \|p\|\le\|D\varphi(x)\|_\infty\}$$

等于

$$K_0 = \max\{|H(x,p,u)|:\ x \in M,\ |u| \le \|\varphi(x)\|_\infty,\ \|p\| \le \|D\varphi(x)\|_\infty\}.$$

注意到 $u_{n,1}(x,t)$ 是下面方程的粘性解

$$\partial_t u + H_n(x, Du, \varphi(x)) = 0. \tag{2.13}$$

类似于 (2.6) 在 $k=1$ 时候的讨论，我们有

$$\partial_t u_{n,1}(x,t) \ge -K_0^n.$$

结合 (2.13) 以及 H_n 的定义，我们有

$$H(x, Du_{n,1}(x,t), 0) \le H_n(x, Du_{n,1}(x,t), 0) \le K_0 + \lambda\|\varphi(x)\|_\infty, \quad \forall n \ge \|D\varphi(x)\|_\infty.$$

因此 $\{u_{n,1}(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等度 Lipschitz 连续的。注意到

$$u_{n,1}(x,0) = \varphi(x).$$

因此 $\{u_{n,1}(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一致有界的，因此它有收敛子列。根据引理 A.3，序列 $u_{n,1}(x,t)$ 点点收敛于 $u_1(x,t)$。故

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n,1}(x,t) = u_1(x,t), \quad \text{uniformly on } M\times[0,T],$$

因此 $u_1(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的。

现在我们假设断言 A[k-1] 成立。此时 $u_{k-1}(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的，并且

$$l_{k-1} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_{n,k-1}(x,t)\|_\infty$$

是有限的。我们通过 A[k-1] 来证明 A[k]. 首先，将连续函数 $u_{k-1}(x,t)$ 带入 (2.4) 并且根据引理 2.1，值函数 $u_k(x,t)$ 的极小曲线在绝对连续曲线类中存在。根据 H_n 的定义，对于 $n \ge \|D\varphi(x)\|_\infty$，

$$K_n := \max\{|H_n(x,p,u)|:\ x\in M,\ |u| \le l_{k-1},\ \|p\| \le \|D\varphi(x)\|_\infty\}$$

始终等于

$$K := \max\{|H(x,p,u)|:\ x\in M,\ |u| \le l_{k-1},\ \|p\| \le \|D\varphi(x)\|_\infty\}.$$

注意到 $u_{n,k}$ 是下面方程的粘性解

$$\partial_t u + H_n(x, Du, u_{n,k-1}(x,t)) = 0. \tag{2.14}$$

类似于 (2.6) 的证明，我们有

$$\partial_t u_{n,k}(x,t) \ge -K_n - \lambda\|\partial_t u_{n,k-1}\|_\infty T.$$

结合 (2.14) 以及 H_n 的定义，我们有

$$\begin{aligned} H(x, Du_{n,k}(x,t), 0) &\le H_n(x, Du_{n,k}(x,t), 0) \\ &\le K + \lambda\|\partial_t u_{n,k-1}\|_\infty T + \lambda l_{k-1}, \quad \forall n \ge \|D\varphi(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

因此 $\{u_{n,k}(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等度 Lipschitz 连续的。注意到

$$u_{n,k}(x,0)=\varphi(x).$$

故 $\{u_{n,k}(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一致有界的。因此它有收敛子列。我们还需要说明所有的子列收敛的极限等于 u_k. 实际上，根据引理 A.3，值函数

$$\bar{u}_{n,k}(x,t):=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L_n(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),u_{k-1}(\gamma(\tau),\tau))d\tau\right\}$$

点点收敛到 $u_k(x,t)$. 取 $u_{n,k}(x,t)$ 的极小曲线 γ，我们有

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n,k}(x,t)-u_{n,k}(x,t)\leq&\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L_n(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),u_{k-1}(\gamma(\tau),\tau))d\tau\\&-\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L_n(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau),u_{n,k-1}(\gamma(\tau),\tau))d\tau\\ \leq&\lambda\|u_{k-1}(x,t)-u_{n,k-1}(x,t)\|_\infty T.\end{aligned}$$

交换 $\bar{u}_{n,k}(x,t)$ 和 $u_{n,k}(x,t)$，我们得到当 $n\to\infty$ 时 $\|\bar{u}_{n,k}(x,t)-u_{n,k}(x,t)\|_\infty\to 0$. 从而

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n,k}(x,t)=u_k(x,t),\quad \text{uniformly on } M\times[0,T],$$

故 $u_k(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的。因此，断言 A[k] 成立。

既然 H_n 在 $T^*M\times\mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛于 H，并且 $u_{n,k}(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上一致收敛于 $u_k(x,t)$，根据粘性解的稳定性，我们得到 $u_k(x,t)$ 是 (2.5) 的 Lipschitz 连续的粘性解。∎

根据引理 2.2 (i)，序列 $u_k(x,t)$ 在 $M\times[0,T]$ 上一致收敛于 $u(x,t)$. 此外，$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k(x,t)\|_\infty$ 是有限的。由于 $\varphi\in\mathrm{Lip}(M)$，$\|D\varphi\|_\infty$ 是有界的。由引理 2.2 (ii)，序列 $\{u_k(x,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是等度 Lipschitz 连续的。因此极限函数 $u(x,t):=T_t^-\varphi(x)$ 是 (2.1) 的 Lipschitz 连续的粘性解。从而定理 2.1 在初值函数 φ Lipschitz 连续的时候得证。

• **连续初值的情形.** 首先，我们需要说明对于每个 $\varphi\in C(M)$，$T_t^-\varphi$ 是良定义的。由引理 2.2，我们只需要证明对于给定的 $T>0$ 以及 $\varphi\in C(M)$，由 (2.4) 定义的 u_k 在 $M\times[0,T]$ 上是连续的。

实际上，对于每个 $\varphi\in C(M)$，存在一列 Lipschitz 连续的函数 $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 φ. 我们在引理 2.4 中已经证明了，对于初值函数 φ_m，方程 (2.5) 的粘性解 $u_k^m(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的。接下来我们通过归纳法进行证明。由定义，u_0^m 一致收敛于 u_0. 假设 u_{k-1}^m 一致收敛于 u_{k-1}，那么 u_{k-1} 是连续的。由引理 2.1(i)，$u_k(x,t)$ 有极小曲线 γ. 由定义

$$u_k^m(x,t)-u_k(x,t)\leq\varphi_m(\gamma(0))-\varphi(\gamma(0))+\lambda\|u_{k-1}^m(x,t)-u_{k-1}(x,t)\|_\infty T.$$

交换 $u_k^m(x,t)$ 和 $u_k(x,t)$，我们得到当 $m\to\infty$ 时，$\|u_k^m-u_k\|_\infty\to 0$. 因此，由 (2.4) 定义的 u_k 在 $M\times[0,T]$ 上是连续的。

根据引理 2.2 (i)，序列 $u_k(x,t)$ 一致收敛于 $u(x,t):=T_t^-\varphi(x)$. 从而 $u(x,t)$ 是连续的。我们还需要说明 $u(x,t)$ 是 (2.1) 的粘性解。

我们已经对于 Lipschitz 连续初值 φ 证明了定理 2.1 (ii). 此时 $T_t^-\varphi(x)$ 是 (2.1) 的 Lipschitz 连续的粘性解。我们断言对于 φ 和 $\psi \in C(M)$,

$$\|T_t^-\varphi - T_t^-\psi\|_\infty \leq e^{\lambda t}\|\varphi - \psi\|_\infty. \tag{2.15}$$

如果这个断言成立，对于 $t \in [0,T]$，函数 $T_t^-\varphi_m$ 在 $m \to \infty$ 时一致收敛于 $T_t^-\varphi$. 根据粘性解的稳定性，我们得到 $T_t^-\varphi$ 是 (2.1) 在连续初值 $u(x,0) = \varphi(x)$ 下的连续粘性解。方程 (2.1) 的粘性解的唯一性则由比较定理给出。断言 (2.15) 的证明见下面的命题 2.1.

2.2.2　定理 2.2 的证明

为了证明定理 2.2，我们首先证明下面关于正负向半群的重要性质。

命题 2.1　对于任意连续函数 φ_1 和 φ_2，有

(1) 如果 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ 对所有 $x \in M$ 成立，那么 $T_t^-\varphi_1(x) < T_t^-\varphi_2(x)$ 并且 $T_t^+\varphi_1(x) < T_t^+\varphi_2(x)$ 对所有 $(x,t) \in M \times (0,+\infty)$ 成立。

(2) 对所有 $t > 0$, $\|T_t^-\varphi_1 - T_t^-\varphi_2\|_\infty \leq e^{\lambda t}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$ 并且 $\|T_t^+\varphi_1 - T_t^+\varphi_2\|_\infty \leq e^{\lambda t}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$.

证明　我们首先证明陈述 (1). 假设存在 $(x,t) \in M \times [0,+\infty)$ 使得 $T_t^-\varphi_1(x) \geq T_t^-\varphi_2(x)$. 令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是满足 $\gamma(t) = x$ 的 $T_t^-\varphi_2(x)$ 的极小曲线。定义

$$F(s) = T_s^-\varphi_2(\gamma(s)) - T_s^-\varphi_1(\gamma(s)), \quad s \in [0,t].$$

那么 F 是 $[0,t]$ 上的连续函数，并且 $F(0) > 0$. 由假设 $F(t) \leq 0$. 从而存在 $s_0 \in [0,t)$ 使得 $F(s_0) = 0$ 并且对所有 $s \in [0,s_0)$，有 $F(s) > 0$. 既然 γ 是 $T_t^-\varphi_2(x)$ 的极小曲线，有

$$T_{s_0}^-\varphi_2(\gamma(s_0)) = T_s^-\varphi_2(\gamma(s)) + \int_s^{s_0} L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_2(\gamma(\tau)))d\tau,$$

以及

$$T_{s_0}^-\varphi_1(\gamma(s_0)) \leq T_s^-\varphi_1(\gamma(s)) + \int_s^{s_0} L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_1(\gamma(\tau)))d\tau,$$

从而 $F(s_0) \geq F(s) - \lambda\int_s^{s_0} F(\tau)d\tau$. 这里 $F(s_0) = 0$，故

$$F(s) \leq \lambda \int_s^{s_0} F(\tau)d\tau.$$

根据 Gronwall 不等式，我们得到对于所有 $s \in [0,s_0)$，有 $F(s) \equiv 0$，这与 $F(0) > 0$ 矛盾。

我们接着证明陈述 (2). 对于给定的 $x \in M$ 以及 $t > 0$，如果 $T_t^-\varphi_1(x) = T_t^-\varphi_2(x)$，那么不需要讨论。不失一般性，我们考虑 $T_t^-\varphi_2(x) > T_t^-\varphi_1(x)$. 令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是 $T_t^-\varphi_1(x)$ 的极小曲线，定义

$$F(s) := T_s^-\varphi_2(\gamma(s)) - T_s^-\varphi_1(\gamma(s)), \quad \forall s \in [0,t].$$

由假设 $F(t) > 0$. 如果存在 $\sigma \in [0,t)$ 使得 $F(\sigma) = 0$ 并且对于所有 $s \in (\sigma,t]$，有 $F(s) > 0$，由定义我们有

$$T_s^-\varphi_2(\gamma(s)) \leq T_t^-\varphi_2(\gamma(\sigma)) + \int_\sigma^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_2(\gamma(\tau)))d\tau,$$

以及

$$T_s^-\varphi_1(\gamma(s)) = T_t^-\varphi_1(\gamma(\sigma)) + \int_\sigma^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_1(\gamma(\tau)))d\tau,$$

从而

$$F(s) \le F(\sigma) + \lambda \int_\sigma^s F(\tau)d\tau,$$

其中 $F(\sigma) = 0$. 由 Gronwall 不等式，对于所有 $s \in [\sigma, t]$，有 $F(s) \equiv 0$，与 $F(t) > 0$ 矛盾。

因此，对于所有 $\sigma \in [0, t]$，有 $F(\sigma) > 0$. 这里 $0 < F(0) \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$. 由定义

$$T_s^-\varphi_2(\gamma(\sigma)) \le T_t^-\varphi_2(\gamma(0)) + \int_0^\sigma L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_2(\gamma(\tau)))d\tau,$$

并且

$$T_s^-\varphi_1(\gamma(\sigma)) = T_t^-\varphi_1(\gamma(0)) + \int_0^\sigma L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^-\varphi_1(\gamma(\tau)))d\tau,$$

从而

$$F(\sigma) \le F(0) + \lambda \int_0^\sigma F(\tau)d\tau.$$

由 Gronwall 不等式得到 $F(\sigma) \le \|\varphi - \psi\|_\infty e^{\lambda\sigma}$. 取 $\sigma = t$，得到 $T_t^-\varphi_2(x) - T_t^-\varphi_1(x) \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty e^{\lambda t}$. 交换 φ_1 和 φ_2，我们最终得到 $\|T_t^-\varphi(x) - T_t^-\psi(x)\|_\infty \le \|\varphi - \psi\|_\infty e^{\lambda t}$.

关于正向半群 T^+ 的相应结论，利用上面类似的讨论不难得到。 ∎

一般而言，当 $H(x, u, p)$ 满足性质 1.2 时，相应的 Lagrange 函数 $L(x, u, \dot x)$ 的局部有界性不成立。但是，类似于 [69] 引理 2.3，我们可以在特定的区域上证明 $L(x, u, \dot x)$ 的有界性。

引理 2.5 令 $H(x, p, 0)$ 满足性质 1.1, 1.2 和 1.4. 存在常数 $\delta > 0$ 和 $\bar C > 0$ 使得对应于 $H(x, p, 0)$ 的 Lagrange 函数 $L(x, \dot x, 0)$ 满足

$$L(x, \xi, 0) \le \bar C, \quad \forall (x, \xi) \in M \times \bar B(0, \delta).$$

在接下来，我们定义

$$\mu := \frac{\mathrm{diam}(M)}{\delta}. \tag{2.16}$$

引理 2.6 令 $\varphi \in C(M)$.

(1) 给定任意 $x_0 \in M$，若 $T_t^-\varphi(x_0)$ 在 $t \to +\infty$ 时没有上界，那么对于任意 $c \in \mathbb{R}$，存在 $t_c > 0$ 使得 $T_{t_c}^-\varphi(x) > \varphi(x) + c$ 对所有 $x \in M$ 成立。

(2) 给定任意 $x_0 \in M$，若 $T_t^-\varphi(x_0)$ 在 $t \to +\infty$ 时没有下界，那么对于任意 $c \in \mathbb{R}$，存在 $t_c > 0$ 使得 $T_{t_c}^-\varphi(x) < \varphi(x) + c$ 对所有 $x \in M$ 成立。

证明 我们只证明陈述 (1). 陈述 (2) 的证明是类似的。假设存在 $c_0 \in \mathbb{R}$ 使得对于所有 $t > 0$，存在一点 $x_t \in M$ 满足 $T_t^-\varphi(x_t) \le \varphi(x_t) + c_0$. 令 $\alpha : [0, \mu] \to M$ 是连接 x_t 和 x 的常速测地线，其中常数 μ 的定义见 (2.16)，那么 $\|\dot\alpha\| \le \delta$. 如果 $T_{t+\mu}^-\varphi(x) > \varphi(x_t) + c_0$，由于 $T_t^-\varphi(x_t) \le \varphi(x_t) + c_0$，存在 $\sigma \in [0, \mu)$ 使得 $T_{t+\sigma}^-\varphi(\alpha(\sigma)) = \varphi(x_t) + c_0$ 并且 $T_{t+s}^-\varphi(\alpha(s)) > \varphi(x_t) + c_0$ 对所有 $s \in (\sigma, \mu]$ 成立。由定义

$$\begin{aligned} T_{t+s}^-\varphi(\alpha(s)) &\le T_{t+\sigma}^-\varphi(\alpha(\sigma)) + \int_\sigma^s L(\alpha(\tau), \dot\alpha(\tau), T_{t+\tau}^-\varphi(\alpha(\tau)))d\tau \\ &= \varphi(x_t) + c_0 + \int_\sigma^s L(\alpha(\tau), \dot\alpha(\tau), T_{t+\tau}^-\varphi(\alpha(\tau)))d\tau, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
T^-_{t+s}\varphi(\alpha(s))-(\varphi(x_t)+c_0) &\le \int_\sigma^s L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),T^-_{t+\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau\\
&\le \int_\sigma^s L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),\varphi(x_t)+c_0)d\tau+\lambda\int_\sigma^s (T^-_{t+\tau}\varphi(\alpha(\tau))-(\varphi(x_t)+c_0))d\tau\\
&\le L_0\mu+\lambda\int_\sigma^s (T^-_{t+\tau}\varphi(\alpha(\tau))-(\varphi(x_t)+c_0))d\tau,
\end{aligned}$$

其中

$$L_0 := \bar C+\lambda\|\varphi+c_0\|_\infty,$$

并且 $\bar C$ 的定义见引理 2.5. 利用 Gronwall 不等式，有

$$T^-_{t+s}\varphi(\alpha(s))-(\varphi(x_t)+c_0)\le L_0\mu e^{\lambda(s-\sigma)}\le L_0\mu e^{\lambda\mu},\quad \forall s\in(\sigma,\mu].$$

取 $s=\mu$，得到 $T^-_{t+\mu}\varphi(x)\le\varphi(x_t)+c_0+L_0\mu e^{\lambda\mu}$. 这说明 $T^-_{t+\mu}\varphi(x)$ 有无关于 t 的上界，这与假设条件相矛盾。 ∎

引理 2.7 如果存在定义在 M 上的两个连续函数 φ_1 and φ_2 使得

$$T_t^-\varphi_1\ge C_1,\quad T_t^-\varphi_2\le C_2,$$

那么存在常数函数 $\bar\varphi$ 使得 $|T_t^-\bar\varphi|\le C_3$ 对所有 $(x,t)\in M\times[0,+\infty)$ 成立，其中 $C_i, i=1,2,3$ 是与 x 和 t 无关的常数。

证明 定义 $A_1:=\|\varphi_1\|_\infty$ 以及 $A_2:=-\|\varphi_2\|_\infty$，那么 $A_2\le A_1$ 并且

$$T_t^-A_1(x)\ge T_t^-\varphi_1(x),\quad T_t^-A_2(x)\le T_t^-\varphi_2(x)\quad \text{for all } x\in M.$$

如果 $T_t^-A_1(x)$ 有无关于 t 的上界，那么令 $\bar\varphi\equiv A_1$ 即可。如果 $T_t^-A_1(x)$ 没有无关于 t 的上界，我们定义

$$A^*:=\inf\{A:\ \exists t_A>0 \text{ such that } T^-_{t_A}A(x)\ge A,\ \forall x\in M\}.$$

利用引理 2.6 (1) 并且取 $c=0$，有 $A^*\le A_1<+\infty$. 接下来的讨论分为两种情况。

情况 (1)：$A^*>-\infty$. 对于这种情况，我们需要说明取 $\bar\varphi\equiv A^*$ 即可。

我们首先证明 $T_t^-A^*(x)$ 有无关于 t 的上界。假设 $T_t^-A^*(x)$ 没有上界。由引理 2.6 (1)，对于 $c=1$,，存在 $t_1>0$ 使得 $T^-_{t_1}A^*(x)>A^*+1$ 对所有 $x\in M$ 成立。由命题 2.1 (2)，对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$T^-_{t_1}(A^*-\varepsilon)(x)\ge T^-_{t_1}A^*(x)-e^{\lambda t_1}\varepsilon>A^*+1-e^{\lambda t_1}\varepsilon.$$

对任意 $0<\varepsilon<(e^{\lambda t_1}-1)^{-1}$，有 $T^-_{t_1}(A^*-\varepsilon)(x)>A^*-\varepsilon$. 这说明我们找到了更小的常数 $A^*-\varepsilon$ 使得如果 $t_{A^*-\varepsilon}:=t_1$，那么

$$T^-_{t_{A^*-\varepsilon}}(A^*-\varepsilon)(x)>A^*-\varepsilon,$$

这与 A^* 的定义矛盾。

我们接着证明 $T_t^-A^*$ 有无关于 t 的下界。假设 $T_t^-A^*(x)$ 没有下界。利用引理 2.6 (2) 并且取 $c=-1$，存在 $t_1>0$ 使得 $T^-_{t_1}A^*(x)<A^*-1$ 对所有 $x\in M$ 成立。既然 $T_t^-A^*(x)$ 有无关于

t 的上界，我们有 $A^* < A_1$. 由命题 2.1 (2) 以及 $A^* < A_1$，存在常数 $\delta_0 > 0$ 使得 $A^* + \delta < A_1$ 并且

$$T_{t_1}^-(A^* + \delta)(x) < A^* - \frac{1}{2} + \delta < A^* + \delta, \tag{2.17}$$

对所有 $\delta \in [0, \delta_0)$ 成立。由 A^* 的定义，存在 $\bar{A} \in [A^*, A^* + \delta_0)$ 和 $t_2 := t_{\bar{A}} > 0$ 使得

$$T_{t_2}^- \bar{A}(x) \geq \bar{A}. \tag{2.18}$$

由 (2.17)，我们有

$$T_{t_1}^- \bar{A}(x) < \bar{A} - \frac{1}{2} < \bar{A}. \tag{2.19}$$

定义 $B^* := \bar{A} - \frac{1}{2}$. 根据 $T_t^-\varphi(x)$ 在 $t = 0$ 的连续性，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对于 $0 \leq \sigma < \varepsilon_0$，有

$$T_\sigma^- B^*(x) \leq \bar{A} - \frac{1}{4}. \tag{2.20}$$

对于 t_1 和 $t_2 > 0$，存在 n_1 和 $n_2 \in \mathbb{N}$，以及 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ 使得 $n_1 t_1 + \varepsilon = n_2 t_2$. 由命题 2.1 (1) 和 (2.17)，有

$$T_{n_1 t_1}^- \bar{A}(x) \leq T_{t_1}^- \bar{A}(x) < B^*. \tag{2.21}$$

在 (2.20) 中取 $\sigma = \varepsilon$. 由命题 2.1 (1) 和 (2.21)，有

$$T_\varepsilon^- \circ T_{n_1 t_1}^- \bar{A}(x) \leq T_\varepsilon^- B^*(x) \leq \bar{A} - \frac{1}{4}. \tag{2.22}$$

由 (2.18)，我们有 $T_{n_2 t_2}^- \bar{A}(x) \geq \bar{A}$. 因此

$$\bar{A} - \frac{1}{4} \geq T_\varepsilon^- \circ T_{n_1 t_1}^- \bar{A}(x) = T_{n_2 t_2}^- \bar{A}(x) \geq \bar{A}, \tag{2.23}$$

导出矛盾。

情况 (2)：$A^* = -\infty$. 在这种情况下，我们需要说明对于所有 $A < A_2$，函数 $T_t^- A(x)$ 是一致有界的。也就是说，取 $\bar{\varphi} \equiv A$ 即可。由于 $T_t^- A(x) \leq T_t^- A_2(x)$，函数 $T_t^- A(x)$ 有上界。函数 $T_t^- A(x)$ 有下界的证明与情况 (1) 类似。实际上，我们只需把 A^*, A_1 换成 A 和 A_2 即可。 ∎

注 2.1 令 $\varphi \in C(M)$. 根据 [70] 定理 6.1，如果 $T_t^-\varphi(x)$ 有无关于 t 的界，那么下半极限

$$\check{\varphi}(x) := \lim_{r \to 0+} \inf\{T_t^-\varphi(y) : d(x,y) < r,\ t > 1/r\}$$

是 (1.2) 的一个 Lipschitz 连续的粘性解。根据命题 B.2，函数 $\check{\varphi}$ 是 (1.2) 的一个负向弱 KAM 解。类似地，如果 $T_t^+\varphi(x)$ 有无关于 t 的界，定义

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(x) :&= \lim_{r \to 0+} \sup\{T_t^+\varphi(y) : d(x,y) < r,\ t > 1/r\} \\
&= \lim_{r \to 0+} \sup\{-\bar{T}_t^-(-\varphi)(y) : d(x,y) < r,\ t > 1/r\} \\
&= -\lim_{r \to 0+} \inf\{\bar{T}_t^-(-\varphi)(y) : d(x,y) < r,\ t > 1/r\}.
\end{aligned}$$

那么 $-\hat{\varphi}$ 是方程 $H(x, -u, -Du) = 0$ 的一个 Lipschitz 连续的粘性解。等价地，函数 $\hat{\varphi}$ 是 (1.2) 的一个正向弱 KAM 解。

定理 2.2 的证明. 由假设，存在 $\varphi \in C(M)$ 和 $t_1 > 0$ 使得 $T_{t_1}^-\varphi \geq \varphi$. 我们取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r \in [0, t_1)$ 使得 $t = n t_1 + r$. 根据命题 2.1 (1)，有 $T_t^-\varphi \geq T_r^-\varphi$. 也即 $T_t^-\varphi$ 有无关于 t 的下界。此外，由假设存在 $\psi \in C(M)$ 和 $t_2 > 0$ 使得 $T_{t_2}^-\psi \leq \psi$. 类似地我们得到 $T_t^-\psi$ 有无关于 t 的上界。由引理 2.7，存在常数函数 $\bar{\varphi}$ 使得 $T_t^-\bar{\varphi}$ 是一致有界的。由注 2.1，方程 (1.2) 的粘性解存在。

2.2.3 定理 2.3 的证明

令 $u_- \in \mathcal{S}_-$. 我们首先证明极限函数 $x \mapsto \lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_-(x)$ 存在。推论 2.1 和 2.3 保证了 $T_t^+ u_-$ 的有界性。此外，定理 2.3 的陈述 (1) 由命题 2.3 给出，陈述 (2) 由命题 2.4 给出。

命题 2.2 令 $\varphi \in C(M)$ 以及 $u_- \in \mathcal{S}_-$. 如果 φ 满足下面条件

($\odot$) $\varphi \le u_-$ 并且存在 x_0 使得 $\varphi(x_0) = u_-(x_0)$.

那么 $T_t^+\varphi(x)$ 有无关于 t 和 φ 的界。

我们将证明分为三部分，即引理 2.8, 2.9 和 2.10.

引理 2.8 假设 φ 满足条件 ($\odot$)，那么 $T_t^+\varphi(x) \le u_-(x)$ 对所有 $t > 0$ 成立。

证明 假设存在 $(x,t) \in M \times (0,+\infty)$ 使得 $T_t^+\varphi(x) > u_-(x)$. 令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是 $T_t^+\varphi(x)$ 满足 $\gamma(0) = x$ 的极小曲线。定义

$$F(s) = T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)) - u_-(\gamma(s)), \quad s \in [0,t].$$

那么 $F(s)$ 是连续的，并且 $F(t) = \varphi(\gamma(t)) - u_-(\gamma(t)) \le 0$. 由假设我们有 $F(0) > 0$. 因此存在 $\tau_0 \in (0,t]$ 使得 $F(\tau_0) = 0$ 并且 $F(\tau) > 0$ 对所有 $s \in [0,\tau_0)$ 成立。对于每个 $\tau \in [0,\tau_0]$，有

$$T_{t-\tau}^+\varphi(\gamma(\tau)) = T_{t-\tau_0}^+\varphi(\gamma(\tau_0)) - \int_\tau^{\tau_0} L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)))ds.$$

既然 $u_- = T_t^- u_-$ 对所有 $t > 0$ 成立，有

$$u_-(\gamma(\tau_0)) \le u_-(\gamma(\tau)) + \int_\tau^{\tau_0} L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u_-(\gamma(s)))ds.$$

因此 $F(\tau) \le F(\tau_0) + \lambda\int_\tau^{\tau_0} F(s)ds$，其中 $F(\tau_0) = 0$. 定义 $F(s) = G(\tau_0 - s)$，我们得到

$$G(\tau_0 - \tau) \le \lambda \int_0^{\tau_0-\tau} G(\sigma)d\sigma.$$

利用 Gronwall 不等式，我们得到 $F(\tau) = G(\tau_0 - \tau) \equiv 0$ 对所有 $\tau \in [0,\tau_0]$ 成立，而这与 $F(0) > 0$ 矛盾。 ∎

推论 2.1 令 $u_- \in \mathcal{S}_-$. 那么 $T_t^+ u_- \le u_-$ 对所有 $t > 0$ 成立。

结合推论 2.1 和命题 2.1 (1)，有 $T_t^+ u_- = T_s^+ \circ T_{t-s}^+ u_- \le T_s^+ u_-$ 对所有 $t > s$ 成立，从而

推论 2.2 $T_t^+ u_-$ 关于 t 是单调非增的。

引理 2.9 假设 φ 满足条件 ($\odot$). 令 $\gamma_- : (-\infty, 0] \to M$ 是一条 $(u_-, L, 0)$-校准曲线，满足 $\gamma_-(0) = x_0$，那么 $T_t^+\varphi(\gamma_-(-t)) = u_-(\gamma_-(-t))$ 对所有 $t > 0$ 成立。

证明 对于每个 $t>0$，我们定义 $\gamma_t(s) := \gamma_-(s-t)$，其中 $s\in[0,t]$. 由引理 2.8，对于 $s\in[0,t]$，有 $u_-(\gamma_t(s)) \geq T^+_{t-s}\varphi(\gamma_t(s))$. 定义

$$F(s) = u_-(\gamma_t(s)) - T^+_{t-s}\varphi(\gamma_t(s)),$$

那么 $F(s)\geq 0$ 并且 $F(t)=0$. 如果 $F(0)>0$，就存在 $s_0\in(0,t]$ 使得 $F(s_0)=0$ 并且 $F(s)>0$ 对所有 $s\in[0,s_0)$ 成立。由定义，对于 $s_1\in[0,s_0)$，有

$$u_-(\gamma_t(s_0)) - u_-(\gamma_t(s_1)) = \int_{s_1}^{s_0} L(\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s),u_-(\gamma_t(s)))ds,$$

以及

$$T^+_{t-s_1}\varphi(\gamma_t(s_1)) \geq T^+_{t-s_0}\varphi(\gamma_t(s_0)) - \int_{s_1}^{s_0} L(\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s),T^+_{t-s}\varphi(\gamma_t(s)))ds,$$

从而

$$F(s_1) \leq F(s_0) + \lambda\int_{s_1}^{s_0} F(s)ds.$$

利用 Gronwall 不等式，我们得到 $F(s)\equiv 0$ 对于所有 $s\in[0,s_0]$ 成立，这与 $F(0)>0$ 相矛盾。因此 $F(0)=0$. 也即 $T^+_t\varphi(\gamma_t(0)) = u_-(\gamma_t(0))$. 注意到 $\gamma_t(s) := \gamma_-(s-t)$. 我们得到 $T^+_t\varphi(\gamma_-(-t)) = u_-(\gamma_-(-t))$. ∎

引理 2.10 假设 φ 满足条件 $(\odot)$，那么 $T^+_t\varphi(x)$ 有无关于 t 和 φ 的下界。

证明 令 $\gamma_- : (-\infty,0]\to M$ 是一条 $(u_-,L,0)$-校准曲线，满足 $\gamma_-(0)=x_0$. 令 $t>\mu$ 以及 $\alpha: [0,\mu]\to M$ 是连接 x 和 $\gamma_-(-t+\mu)$ 的常速测地线，那么 $\|\dot\alpha\|\leq\delta$. 如果 $T^+_t\varphi(x)\geq u_-(\gamma_-(-t+\mu))$，那么证明结束。所以我们需要考虑 $T^+_t\varphi(x) < u_-(\gamma_-(-t+\mu))$. 既然

$$T^+_{t-\mu}\varphi(\gamma_-(-t+\mu)) = u_-(\gamma_-(-t+\mu)),$$

那么存在 $\sigma\in(0,\mu]$ 使得

$$T^+_{t-\sigma}\varphi(\alpha(\sigma)) = u_-(\gamma_-(-t+\mu)),\quad T^+_{t-s}\varphi(\alpha(s)) < u_-(\gamma_-(-t+\mu))\quad \text{for all } s\in[0,\sigma).$$

由定义，有

$$\begin{aligned} T^+_{t-s}\varphi(\alpha(s)) &\geq T^+_{t-\sigma}\varphi(\alpha(\sigma)) - \int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),T^+_{t-\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau \\ &= u_-(\gamma_-(-t+\mu)) - \int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),T^+_{t-\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &u_-(\gamma_-(-t+\mu)) - T^+_{t-s}\varphi(\alpha(s)) \leq \int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),T^+_{t-\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau \\ &\leq \int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),u_-(\gamma_-(-t+\mu)))d\tau + \lambda\int_s^\sigma (u_-(\gamma_-(-t+\mu)) - T^+_{t-\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau \\ &\leq L_0\mu + \lambda\int_s^\sigma (u_-(\gamma_-(-t+\mu)) - T^+_{t-\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$L_0 := \bar C + \lambda\|u_-\|_\infty,$$

并且 $\bar{C}$ 由引理 2.5 给出。令 $G(\sigma-s)=u_-(\gamma_-(-t+\mu))-T^+_{t-s}\varphi(\alpha(s))$，那么

$$G(\sigma-s)\le L_0\mu+\lambda\int_0^{\sigma-s}G(\tau)d\tau.$$

由 Gronwall 不等式，有

$$u_-(\gamma_-(-t+\mu))-T^+_{t-s}\varphi(\alpha(s))=G(\sigma-s)\le L_0\mu e^{\lambda(\sigma-s)}\le L_0\mu e^{\lambda\mu},\quad \forall s\in[0,\sigma).$$

因此 $T^+_t\varphi(x)\ge u_-(\gamma_-(-t+\mu))-L_0\mu e^{\lambda\mu}$. 我们最终得到了 $T^+_t\varphi(x)$ 无关于 t 和 φ 的下界。∎

推论 2.3 $T^+_t u_-$ 有无关于 t 和 u_- 的下界。

命题 2.3 当 $t\to+\infty$ 时，$T^+_t u_-$ 一致收敛于 (1.2) 的一个正向弱 KAM 解 u_+.

证明 由注 2.1

$$\hat{u}_+(x)=\lim_{r\to0+}\sup\{T^+_t u_-(y):\ d(x,y)<r,\ t>1/r\}$$

是 (1.2) 的一个正向弱 KAM 解。推论 2.2 说明点点极限存在，并且满足 $\lim_{t\to+\infty}T^+_t u_-\le\hat{u}_+$. 既然 $T^+_t u_-$ 关于 t 单调非增，对于所有 $t>0$，有

$$\begin{aligned}T^+_t u_-(x)&=\lim_{r\to0+}\sup\{T^+_t u_-(y):\ d(x,y)<r\}\\&\ge\lim_{r\to0+}\sup\{T^+_{t+s}u_-(y):\ d(x,y)<r,\ t+s>1/r\}=\hat{u}_+(x).\end{aligned}$$

因此 $\lim_{t\to+\infty}T^+_t u_-=\hat{u}_+$. 注意到 $T^+_t u_-$ 关于 t 单调非增，由 Dini 定理，$T^+_t u_-$ 一致收敛于 $\hat{u}_+$.∎

这里我们再给出另一个证明，这个证明不依赖于 [70].

证明 首先注意到 $T^+_t\varphi:=-\bar{T}^-_t(-\varphi)$，其中 $\bar{T}^-_t$ 是 $L(x,-u,-\dot{x})$ 对应的解半群。既然 $T^+_t u_-$ 关于 t 单调递减，函数 $u(x,t):=\bar{T}^-_t(-u_-)$ 关于 t 单调。因此 $\partial_t u(x,t)\ge0$ 在粘性解意义上成立。既然 $u(x,t)$ 是 $\partial_t u+H(x,-u,-\partial_x u)=0$ 的粘性解，有 $H(x,-u,-\partial_x u)\le0$. 既然 $T^+_t u_-$ 有无关于 t 的界，$u(x,t)$ 有无关于 t 的界。由性质 1.2 我们得到 $\|\partial_x T^+_t u_-\|_\infty=\|\partial_x u(x,t)\|_\infty$ 有无关于 t 的界。推论 2.2 和 2.3 说明点点极限 $u_+(x)=\lim_{t\to+\infty}T^+_t u_-(x)$ 存在。既然 $\|\partial_x T^+_t u_-\|_\infty$ 有无关于 t 的界，极限函数 u_+ 是连续的。利用 Dini 定理，$T^+_t u_-$ 一致收敛于 u_+. 还需要说明 u_+ 是 T^+_t 的不动点。对任意 $t>0$，由命题 2.1 (2)，有

$$\|T^+_{t+s}u_--T^+_t u_+\|_\infty\le e^{\lambda t}\|T^+_s u_--u_+\|_\infty.$$

令 $s\to+\infty$，我们得到 $T^+_t u_+=u_+$.∎

命题 2.4 集合 $\mathcal{I}_{u_-}$ 是非空的。具体而言，令 $\gamma_-:(-\infty,0]\to M$ 是一条 $(u_-,L,0)$-校准曲线。定义 $x\in M$ 属于 γ_- 的 α-极限集 $\alpha(\gamma_-)$，如果存在序列 $t_n\to-\infty$ 使得 $d(\gamma_-(t_n),x)\to0$. 那么 $\alpha(\gamma_-)$ 是非空的，并且包含于 $\mathcal{I}_{u_-}$.

证明 令 $\gamma_- : (-\infty, 0] \to M$ 是一条 $(u_-, L, 0)$-校准曲线. 由引理 2.9, 对于 $t > 0$ 有

$$T_t^+ u_-(\gamma_-(-t)) = u_-(\gamma_-(-t)).$$

既然 M 是紧致的, 集合 $\alpha(\gamma_-)$ 是非空的。令 $x^* \in \alpha(\gamma_-)$ 并且 $t_n \to +\infty$ 使得 $d(\gamma_-(-t_n), x^*) \to 0$. 下面的不等式成立

$$\begin{aligned}|T_{t_n}^+ u_-(\gamma_-(-t_n)) - u_+(x^*)| \leq & |T_{t_n}^+ u_-(\gamma_-(-t_n)) - u_+(\gamma_-(-t_n))| \\ & + |u_+(\gamma_-(-t_n)) - u_+(x^*)|.\end{aligned}$$

这里函数 u_+ 是 Lipschitz 连续的, 见命题 B.1. 因此, 当 $t_n \to +\infty$, 有

$$|u_+(\gamma_-(-t_n)) - u_+(x^*)| \to 0.$$

既然 $T_t^+ u_-$ 一致收敛于 u_+, 那么

$$|T_{t_n}^+ u_-(\gamma_-(-t_n)) - u_+(\gamma_-(-t_n))| \to 0.$$

因此, 序列 $T_{t_n}^+ u_-(\gamma_-(-t_n))$ 的极限是 $u_+(x^*)$. 另一方面, 我们有

$$T_{t_n}^+ u_-(\gamma_-(-t_n)) = u_-(\gamma_-(-t_n)),$$

由 u_- 的连续性, 它收敛于 $u_-(x^*)$. 我们得到 $u_+(x^*) = u_-(x^*)$. 这说明 $\alpha(\gamma_-) \subseteq \mathcal{I}_{u_-}$. ∎

2.3 本章小结

在这一章, 我们考虑了 $H(x, p, u)$ 关于 u 一致 Lipschitz 连续的一般情形, 即性质 1.3, 而没有对 $H(x, p, u)$ 关于 u 的单调性做进一步的限制。在 $H(x, p, u)$ 满足性质 1.1-1.4 的假设下, 我们得到了以下结论:

- 演化方程 Cauchy 问题 (2.1) 的唯一粘性解的隐式半群表示。并且在初值函数 φ 连续和 Lipschitz 连续的条件下, 证明了粘性解相应的正则性。
- 得到了定态方程 (1.2) 粘性解存在性的一个充分条件。与 Perron 方法不同, 我们得到的结果并不要求有任何的序关系。
- 模仿定理 1.13, 我们考虑了定态方程 (1.2) 的正负向弱 KAM 解之间的关系, 并且定义了相应的投影 Aubry 集。

在接下来的第 3 章和第 4 章, 我们将对 $H(x, p, u)$ 关于 u 的单调性做进一步的限制, 得到更多进一步的结论。

第 3 章　单调情形

3.1　严格单调递增情形

在本小节，我们假设 $H: T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4 以及

性质 3.1 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递增。

那么相应的 Lagrange 函数满足性质 2.1-2.3，并且关于 u 严格单调递减。同时我们还假设方程 (1.2) 的粘性解存在。

定理 3.1 方程 (1.2) 的粘性解 u_- 是唯一的，并且

(1) 极限函数 $\lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_-$ 存在，记为 u_+，有

$$u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+;$$

(2) u_+ 是集合 $\mathcal{S}_+$ 中的最大元；

(3) 对于每个 $v_+ \in \mathcal{S}_+$，定义

$$\mathcal{I}_{v_+} := \{x \in M : u_-(x) = v_+(x)\},$$

那么 $\mathcal{I}_{v_+}$ 非空，并且 $\mathcal{I}_{v_+} \subseteq \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$.

从弱 KAM 理论的角度，我们称 (u_-, u_+) 为共轭对。

证明 粘性解 u_- 的唯一性由比较定理保证，见定理 1.2. 由定理 2.3，极限函数 $\lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_-$ 存在，并且是正向弱 KAM 解，记它为 u_+. 根据正负向半群的对偶关系，$T_t^- u_+$ 一致收敛于唯一的负向弱 KAM 解，即

$$u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+.$$

下面我们证明 u_+ 是最大元。对于任意 $v_+ \in \mathcal{S}_+$，我们首先证明 $v_+ \le T_t^- v_+$ 对每个 $t > 0$ 成立。假设存在 $x \in M$ 以及 $t > 0$ 使得 $v_+(x) > T_t^- v_+(x)$. 令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是满足 $\gamma(t) = x$ 的 $T_t^- v_+(x)$ 的一条极小曲线。定义 $F(s) := v_+(\gamma(s)) - T_s^- v_+(\gamma(s))$，那么 $F(0) = 0$. 由假设 $F(t) > 0$. 那么存在 $s_0 \in [0,t)$ 使得 $F(s_0) = 0$ 并且 $F(s) > 0$ 对所有 $s \in (s_0, t]$ 成立。由定义

$$T_s^- v_+(\gamma(s)) = T_{s_0}^- v_+(\gamma(s_0)) + \int_{s_0}^{s} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), T_s^- v_+(\gamma(s)))ds,$$

以及

$$v_+(\gamma(s_0)) \ge v_+(\gamma(s)) - \int_{s_0}^{s} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), v_+(\gamma(s)))ds.$$

因此

$$F(s) \le F(s_0) + \lambda \int_{s_0}^{s} F(\sigma) d\sigma,$$

我们得到 $F(s) \equiv 0$ 对所有 $s \in [s_0, t]$ 成立，这与 $F(t) > 0$ 矛盾。因此 $v_+ \le T_t^- v_+$. 根据命题 2.4，$T_t^- v_+$ 的一致极限为 u_-. 取极限我们得到 $v_+ \le u_-$. 作用 T_t^+ 有 $v_+ \le T_t^+ u_-$，再次取极限我们得到 $v_+ \le u_+$ 对所有 $v_+ \in \mathcal{S}_+$ 成立。

由定理 2.3 以及 u_- 的唯一性，集合 $\mathcal{I}_{v_+}$ 非空。我们还需要证明 $\mathcal{I}_{v_+} \subseteq \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$. 显然对于 $x \in \mathcal{I}_{v_+}$，有

$$u_-(x) = v_+(x) \le u_+(x) \le u_-(x),$$

那么 $u_-(x) = v_+(x) = u_+(x)$，也即 $x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$. ∎

我们接着考虑 Cauchy 问题 (2.1) 的粘性解的长期行为。

定理 3.2 对于任意初值 $\varphi \in C(M)$，极限函数 $\lim_{t\to+\infty} T_t^- \varphi(x)$ 存在，并且等于方程 (1.2) 的唯一粘性解。

注 3.1 对比定理 1.5 以及文献 [71] 中的相关结论，这里我们不要求 $H(x,p,u)$ 关于 p 严格凸，但是要求它关于 u 严格单调递增。

引理 3.1 令 $\varphi(x) \in Lip(M)$. 如果 $u(x,t) = T_t^- \varphi(x)$ 有无关于 t 的界，那么它有与 t 无关的 Lipschitz 常数。

证明 定义

$$M := \sup\{|H(x,p,u)| : x \in M, |u| \le \|u(x,t)\|_\infty, \|p\| \le \|D\varphi(x)\|_\infty\},$$

由于 $-M + H(x, D\varphi, u(x,t)) \le 0$ 几乎处处成立，Lipschitz 连续函数 $w(x,t) = \varphi(x) - Mt$ 是下面方程的粘性下解

$$\partial_t w(x,t) + H(x, Dw(x,t), u(x,t)) = 0.$$

对于任意 $h > 0$，定义连续函数

$$\bar{w}(x,t) = \begin{cases} \varphi(x) - Mt, & t \le h. \\ u(x, t-h) - Mh, & t > h. \end{cases}$$

对于 $t \ge h$ 有

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{w}(x,t) + H(x, D\bar{w}(x,t), \bar{w}(x,t)) \\ &= \partial_t u(x,t-h) + H(x, Du(x,t-h), u(x,t-h) - Mh) \\ &\le \partial_t u(x,t-h) + H(x, Du(x,t-h), u(x,t-h)) = 0, \end{aligned}$$

其中最后的不等式由性质 3.1 保证。因此 $\bar{w}$ 是 (2.1) 在 $M \times [h, +\infty)$ 上的粘性下解，满足 $\bar{w}(x,h) = \varphi(x) - Mh \le u(x,h)$. 由比较定理，对于所有 $t \ge 0$ 有

$$\bar{w}(x,t+h) = u(x,t) - Mh \le u(x,t+h),$$

从而 $\partial_t u(x,t) \ge M$. 带回 (2.1)，我们得到 $H(x, Du(x,t), u(x,t)) \le M$. 由性质 1.2，$\|Du(x,t)\|_\infty$ 关于 t 是一致有界的。从而 $\|\partial_t u(x,t)\|_\infty$ 也是一致有界的。 ∎

定理 3.2 的证明. 我们首先处理 $\varphi \in Lip(M)$ 的情形。我们断言对于 $\varphi \in Lip(M)$, $T_t^-\varphi(x)$ 有无关于 t 的界。实际上, 由于 $H(x,u,p)$ 满足性质 3.1, $u_-(x)+\|u_- - \varphi\|_\infty$ 和 $u_-(x)-\|u_- - \varphi\|_\infty$ 分别是 (1.2) 的粘性上解和粘性下解。由比较定理, $u_-(x)-\|u_- - \varphi\|_\infty \le T_t^-\varphi(x) \le u_-(x)+\|u_- - \varphi\|_\infty$ 对所有 $x \in M$ 成立。因此 $T_t^-\varphi(x)$ 有无关于 t 的界。

由注 2.1，下半极限满足 $\check{\varphi}(x) = u_-(x) \le \liminf_{t\to+\infty} T_t^-\varphi(x)$. 令 κ 是 $T_t^-\varphi(x)$ 关于 x 的 Lipschitz 常数，根据引理 3.1，它与 t 无关。注意到

$$|\sup_{s\ge t} T_s^-\varphi(x) - \sup_{s\ge t} T_s^-\varphi(y)| \le \sup_{s\ge t} |T_s^-\varphi(x) - T_s^-\varphi(y)| \le \kappa d(x,y),$$

因此极限过程 $\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\ge t} T_s^-\varphi(x)$ 关于 x 是一致的。因此 $\limsup_{t\to+\infty} T_t^-\varphi(x)$ 是连续的。我们还需要证明

$$\limsup_{t\to+\infty} T_t^-\varphi(x) \le u_-(x).$$

令

$$\bar{u}(x) := \limsup_{t\to+\infty} T_t^-\varphi(x).$$

我们断言对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $s_0 > 0$ 无关于 x 使得对于任意 $s \ge s_0$ 有

$$T_s^-\varphi(x) \le \bar{u}(x) + \varepsilon.$$

固定 $x \in M$，由上极限的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $s_0(x) > 0$ 使得对任意 $s \ge s_0(x)$ 有

$$T_s^-\varphi(x) \le \bar{u}(x) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $r := \frac{\varepsilon}{3\kappa}$，对于 $s \ge s_0(x)$ 有

$$\begin{aligned} T_s^-\varphi(y) &\le T_s^-\varphi(x) + \kappa d(x,y) \le \bar{u}(x) + \frac{\varepsilon}{3} + \kappa d(x,y) \\ &\le \bar{u}(y) + \frac{\varepsilon}{3} + 2\kappa d(x,y) \le \bar{u}(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in B_r(x). \end{aligned}$$

由于 M 是紧致的，存在有限个点 $x_i \in M$ 使得对于任意 $y \in M$，存在点 x_i 使得 $y \in B_r(x_i)$. 令 $s_0 := \max_i s_0(x_i)$，断言成立。

由命题 2.1 有

$$T_t^-(T_s^-\varphi(x)) \le T_t^-(\bar{u}(x) + \varepsilon) \le T_t^-\bar{u}(x) + \varepsilon e^{\lambda t}.$$

取极限 $s \to +\infty$ 有

$$\bar{u}(x) = \limsup_{s\to+\infty} T_t^-(T_s^-\varphi(x)) \le T_t^-\bar{u}(x) + \varepsilon e^{\lambda t}.$$

令 $\varepsilon \to 0+$ 我们得到 $\bar{u}(x) \le T_t^-\bar{u}(x)$，这说明 $T_t^-\bar{u}(x)$ 关于 t 单调非减。

由于 $H(x,u,p)$ 满足性质 3.1，函数 $u_-(x) + \|\bar{u} - u_-\|$ 是 $\partial_t u + H(x,u,Du) = 0$ 的粘性上解。由比较定理，$T_t^-\bar{u}(x) \le u_-(x) + \|\bar{u} - u_-\|$，这说明 $T_t^-\bar{u}$ 有无关于 t 的上界。因此极限函数 $\lim_{t\to+\infty} T_t^-\bar{u}(x)$ 存在，并且等于 u_-. 从而

$$\limsup_{t\to+\infty} T_t^-\varphi(x) = \bar{u}(x) \le \lim_{t\to+\infty} T_t^-\bar{u}(x) = u_-(x).$$

现在考虑 $\varphi \in C(M)$. 对于常数函数 $K := \|\varphi\|_\infty$. 我们已经证明了 $\lim_{t\to+\infty} T_t^-(\pm K) = u_-$. 由命题 2.1 (1)，我们有

$$T_t^-(-K) \leq T_t^-\varphi \leq T_t^- K.$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty} T_t^-\varphi = u_-.$$

证毕。

3.2 严格单调递减情形

在本小节，我们将考虑 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递减的情形。此时文献 [15] 中引入的 “proper” 条件

$$H(x,r,p) \leqslant H(x,s,p) \text{ whenever } r \leqslant s.$$

不再成立，大部分的 PDE 方法，例如比较定理，将不再适用。在本小节，我们假设 $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.1-1.4 以及

性质 3.2 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递减。

那么相应的 Lagrange 函数满足性质 2.1-2.3，并且关于 u 严格单调递增。同时我们假设 (1.2) 的粘性解存在。受到定义 2.1 的启发，我们转而考虑 $\bar{H}(x,p,u) := H(x,-p,-u)$，此时 $\bar{H}$ 满足 3.1 节的假设，即性质 1.1-1.4 以及 3.1. 要考虑 (1.2) 的粘性解，就是要考虑单调递增方程

$$\bar{H}(x, Du(x), u(x)) = 0 \tag{3.1}$$

的正向弱 KAM 解。根据定理 2.3，负向弱 KAM 解的存在性保证了正向弱 KAM 解的存在，即 (1.2) 和 (3.1) 粘性解的存在性是等价的。由 [60] 例 1.1 以及下面的例 3.1 可知，性质 3.2 成立时 (1.2) 的粘性解可能不唯一。我们定义方程 (1.2) 的粘性解集 $\mathcal{S}_-$ 上的偏序关系：

$$v_1 \preceq v_2 \text{ 当且仅当 } v_1(x) \leq v_2(x) \text{ 对所有 } x \in M \text{ 成立。}$$

定理 3.3 对于定态方程 (1.2)，有如下结论：

(1) 集合 $\mathcal{S}_-$ 在 $\|\cdot\|_\infty$-范数诱导的拓扑下是紧的。

(2) 令 $v_- := \min_{v\in\mathcal{S}_-} v$，那么 $v_- \in \mathcal{S}_-$. 粘性解集 $\mathcal{S}_-$ 在上述偏序意义下的最大元存在。

(3) 令 u_+ 是 (1.2) 的唯一正向弱 KAM 解。对于 $v \in \mathcal{S}_-$，定义 $\mathcal{I}_v := \{x \in M : v(x) = u_+(x)\}$. 令 v_1 和 $v_2 \in \mathcal{S}_-$，那么

  (i) 如果 $v_1 \preceq v_2$，那么 $\emptyset \neq \mathcal{I}_{v_2} \subseteq \mathcal{I}_{v_1} \subseteq \mathcal{I}_{v_-}$，其中 $v_- := \min_{v\in\mathcal{S}_-(F)} v$.

  (ii) 如果存在 $\mathcal{I}_{v_1}$ 的一个邻域 $\mathcal{O}$ 使得 $v_2|_{\mathcal{O}} \leq v_1|_{\mathcal{O}}$，那么 $v_2 \leq v_1$ 处处成立。

  (iii) 如果 $\mathcal{I}_{v_2} = \mathcal{I}_{v_1}$ 并且 $v_2|_{\mathcal{O}} = v_1|_{\mathcal{O}}$，那么 $v_1 = v_2$ 处处成立。

例 3.1 为了说明上面邻域的条件是必要的，我们考虑下面的例子

$$-\lambda u(x)+\frac{1}{2}|Du(x)|^2+V(x)=0,\quad x\in\mathbb{S}^1\simeq(-1,1], \tag{3.2}$$

其中 $V(x)$ 是函数 $x^2/2$ 在单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 上的限制。那么 $H(x,u,p)=-\lambda u+|p|^2/2+V(x)$ 在 $T^*\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ 上是 Lipschitz 连续的。假设 $\lambda>2$，那么存在两个粘性解

$$u_1(x)=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}V(x),\quad u_2(x)=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}V(x).$$

可以证明唯一的正向弱 KAM 解 u_+ 满足 $u_+(0)=u_1(0)=u_2(0)$ 并且在 $(0,1]$ 上 $u_+(x)<u_2(x)$. 这说明即使 $\mathcal{I}_{u_1}=\mathcal{I}_{u_2}=\{0\}$，也不能得到 $u_1=u_2$ 处处成立。

我们接下来考虑 Cauchy 问题 (2.1) 的粘性解的长期行为。

定理 3.4 对于任意 $\varphi\in C(M)$，记 $u(x,t)$ 是 (2.1) 的唯一粘性解，那么

(1) 如果 φ 满足以下条件

(∗) $\varphi\geq u_+$ 并且存在一点 x_0 使得 $\varphi(x_0)=\bar{u}_+(x_0)$.

那么 $u(x,t)$ 具有与 t 和 φ 无关的界。

(2) 如果条件 (∗) 不成立，同时性质 2.4 成立，那么

(a) 如果存在一点 x_0 使得 $\varphi(x_0)<u_+(x_0)$，那么 $u(x,t)$ 在 $t\to+\infty$ 时一致趋于 $-\infty$；

(b) 如果 $\varphi>u_+$，那么 $u(x,t)$ 在 $t\to+\infty$ 时一致趋于 $+\infty$.

3.2.1 主要结论的证明

在本小节中，为了记号简便，我们假设 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递增，并且考虑 (1.2) 的正向弱 KAM 解和正向半群。在下面的证明中，除了例 3.1 的证明以外，我们的基本假设和 3.1 小节是一致的。由定义，这与考虑严格单调递减情形下 (1.2) 的粘性解和负向半群是等价的，两者只相差一个负号。在命题 3.1 中，我们证明了方程 (1.2) 的正向弱 KAM 解集合关于 $W^{1,\infty}$-范数的一致有界性。在命题 3.2 中，我们证明了 (1.2) 最小正向弱 KAM 解的存在性，这说明定理 3.3 (2) 中偏序意义下的最大元存在。在命题 3.3 中，我们证明了方程 (1.2) 正向弱 KAM 解关于投影 Aubry 集邻域的比较定理。在命题 3.4 中，我们考虑了正向半群作用下 $T_t^+\varphi$ 的长期行为。

命题 3.1 正向弱 KAM 解集合 $\mathcal{S}_+$ 在 $\|\cdot\|_\infty$-范数诱导的拓扑下是紧的。

证明 既然 $v_+\leq u_-$，我们还需要证明 $v_+\in\mathcal{S}_+$ 有一致下界。取 $y\in\mathcal{I}_{v_+}$，那么 $v_+(y)=u_-(y)$. 令 $\alpha:[0,\mu]\to M$ 是连接 x 和 y 的常速测地线，那么 $\|\dot\alpha\|\leq\delta$. 如果 $v_+(x)\geq u_-(y)$，那么证明结束。如果 $T_\mu^+v_+(x)=v_+(x)<u_-(y)$，由于 $v_+(y)=u_-(y)$，存在 $\sigma\in(0,\mu]$ 使得 $v_+(\alpha(\sigma))=u_-(y)$ 并且 $v_+(\alpha(s))<u_-(y)$ 对所有 $s\in[0,\sigma)$ 成立。由定义

$$\begin{aligned}v_+(\alpha(s))&\geq v_+(\alpha(\sigma))-\int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),v_+(\alpha(\tau)))d\tau\\&=u_-(y)-\int_s^\sigma L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),v_+(\alpha(\tau)))d\tau,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}u_-(y) - v_+(\alpha(s)) &\le \int_s^\sigma L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau), v_+(\alpha(\tau)))d\tau \\ &\le \int_s^\sigma L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau), u_-(y))d\tau + \lambda \int_s^\sigma (u_-(y) - v_+(\alpha(\tau)))d\tau \\ &\le L_0\mu + \lambda \int_s^\sigma (u_-(y) - v_+(\alpha(\tau)))d\tau,\end{aligned}$$

其中

$$L_0 := C_L + \lambda \|u_-\|_\infty.$$

令 $G(\sigma - s) = u_-(y) - v_+(\alpha(s))$，那么

$$G(\sigma - s) \le L_0\mu + \lambda \int_0^{\sigma - s} G(\tau)d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式有

$$u_-(y) - v_+(\alpha(s)) = G(\sigma - s) \le L_0\mu e^{\lambda(\sigma - s)} \le L_0\mu e^{\lambda\mu}, \quad \forall s \in [0, \sigma).$$

因此 $v_+(x) \ge u_-(y) - L_0\mu e^{\lambda\mu}$，即 v_+ 有一致下界。那么存在常数 $K > 0$ 使得 $\|v_+\|_\infty \le K$.

我们接着证明 v_+ 是等度 Lipschitz 连续的。对于任意 $x, y \in M$，令 $\alpha : [0, d(x, y)/\delta] \to M$ 是长度为 $d(x, y)$ 的测地线，具有常速度 $\|\dot{\alpha}\| = \delta$ 并且连接 x 和 y. 那么

$$L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), v_+(\alpha(s))) \le C_L + \lambda K, \quad \forall s \in [0, d(x, y)/\delta].$$

由于 $v_+ \prec L$，有

$$v_+(y) - v_+(x) \le \int_0^{d(x,y)/\delta} L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), v_+(\alpha(s)))ds \le \frac{1}{\delta}(C_L + \lambda K)d(x, y).$$

交换 x 和 y，我们得到了 $\|v_+\|_{W^{1,\infty}}$ 的一致有界性。 ∎

命题 3.2 令 A 是 $\mathcal{S}_+$ 的一个全序子集，对每个 $x \in M$ 定义 $\bar{u}(x) := \inf_{u \in A} u(x)$，那么 $\bar{u} \in \mathcal{S}_+$.

证明 既然 $v_+ \in \mathcal{S}_+$ 有下界，函数 $\bar{u} := \inf_{u \in A} u(x)$ 对于每个 $x \in M$ 是良定义的。如果 A 是有限集，结论是显然的。我们只需要讨论 A 是无限集的情况。由命题 3.1，集合 $\mathcal{S}_+$ 中的序列 u_n 点点收敛意味着一致收敛。我们首先说明极限函数在 $\mathcal{S}_+$ 中。由命题 2.1 (2)，有

$$\|T_t^+ u_n - T_t^+ \bar{u}\|_\infty \le e^{\lambda t}\|u_n - \bar{u}\|_\infty,$$

上式右端一致收敛于零，因此

$$T_t^+ \bar{u} = \lim_{n \to +\infty} T_t^+ u_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \bar{u}.$$

我们接着证明 A 中点点收敛于 $\bar{u}$ 的序列存在。从而根据上面讨论 $\bar{u} \in \mathcal{S}_+$. 由命题 3.1，所有 $u \in \mathcal{S}_+$ 都是 κ-Lipschitz 连续的，因此

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) \le \sup_{u \in \mathcal{S}_+} |u(x) - u(y)| \le \kappa|x - y|. \tag{3.3}$$

既然 M 是紧致的，它是可分的，因此存在可数的稠密子集，记为 $U := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

我们断言，存在序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ 使得对于给定的 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$，有

$$0 \le u_n(x_i) - \bar{u}(x_i) < \frac{1}{n}. \tag{3.4}$$

利用这个断言，我们可以证明序列 u_n 点点收敛于 $\bar{u}$. 实际上，对于每个 $x \in M$，存在序列 $V := \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq U$ 使得 $|x_m - x| < \frac{1}{m}$. 给定 $x \in M$ 和 $n \in \mathbb{N}$，对于 $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap V$，利用 (3.3) 有

$$\begin{aligned}|u_n(x) - \bar{u}(x)| &\le |u_n(x) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - \bar{u}(x_i)| + |\bar{u}(x) - \bar{u}(x_i)| \\ &\le 2\kappa|x_i - x| + \frac{1}{n} \le \frac{2\kappa}{i} + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

令 n 和 i 趋于无穷，我们得到 u_n 点点收敛于 $\bar{u}$.

我们最后来证明上面的断言。由 $\bar{u}$ 的定义，有 $u_n \ge \bar{u}$. 接下来，我们构造序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ 使得对于给定的 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$，式 (5.9) 成立。首先，对于 $x_1 \in U$，我们取 $v_1 \in A$ 满足 $v_1(x_1) - \bar{u}(x_1) < 1/n$. 令 $x_j \in U$ $(j \le n)$ 满足 $v_1(x_j) - \bar{u}(x_j) \ge 1/n$ 并且 $v_1(x_i) - \bar{u}(x_i) < 1/n$ 对 $i \le j-1$ 成立。对于 x_j，取 $v_2 \in A$ 满足 $v_2(x_j) - \bar{u}(x_j) < 1/n$. 那么

$$v_2(x_j) < \bar{u}(x_j) + \frac{1}{n} \le v_1(x_j).$$

注意到 A 是全序子集，有 $v_2 \le v_1$. 因此，对于 $i \le j-1$ 有

$$v_2(x_i) - \bar{u}(x_i) \le v_1(x_i) - \bar{u}(x_i) < \frac{1}{n}.$$

因此，我们找到了 $v_2 \in A$ 满足对所有 $i \in \{1, 2, \dots, j\}$，有 $v_2(x_i) - \bar{u}(x_i) < 1/n$. 重复上述操作，我们得到 $v_k \in A$ $(k \le n)$ 满足对于所有 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$，有

$$v_k(x_i) - \bar{u}(x_i) < \frac{1}{n}.$$

取 $u_n = v_k$ 即可。 ∎

命题 3.3 令 v_+ 和 v_+' 是定态方程 (1.2) 的两个正向弱 KAM 解，那么

(1) 如果 $v_+ \le v_+'$，那么 $\emptyset \ne \mathcal{I}_{v_+} \subseteq \mathcal{I}_{v_+'} \subseteq \mathcal{I}_{u_+}$;

(2) 如果存在 $\mathcal{I}_{v_+}$ 的邻域 $\mathcal{O}$ 使得 $v_+'|_{\mathcal{O}} \ge v_+|_{\mathcal{O}}$，那么 $v_+' \ge v_+$ 处处成立。

(3) 如果 $\mathcal{I}_{v_+'} = \mathcal{I}_{v_+}$ 并且 $v_+'|_{\mathcal{O}} = v_+|_{\mathcal{O}}$，那么 $v_+' = v_+$ 处处成立。

证明 陈述 (1) 由定理 3.1 (3) 保证，陈述 (3) 由陈述 (2) 容易得到。因此我们只需要证明陈述 (2). 由命题 2.4，对于满足 $\gamma_+(0) = x$ 的 $(v_+, L, 0)$-校准曲线 $\gamma_+ : [0, +\infty) \to M$，存在足够大的 t_0 使得 $\gamma_+(t_0) \in \mathcal{O}$. 定义

$$F(s) = v_+(\gamma_+(s)) - v_+'(\gamma_+(s)), \quad s \in [0, t_0].$$

如果 $v_+ > v'_+$，那么 $F(0) = v_+(x) - v'_+(x) > 0$ 并且 $F(t_0) = v_+(\gamma_+(t_0)) - v'_+(\gamma_+(t_0)) \le 0$. 从而存在 $\sigma \in (0, t_0]$ 使得 $F(\sigma) = 0$ 并且 $F(s) > 0$ 对所有 $s \in [0, \sigma)$ 成立。由定义

$$v_+(\gamma_+(\sigma)) - v_+(\gamma_+(s)) = \int_s^\sigma L(\gamma_+(\tau), \dot{\gamma}_+(\tau), v_+(\gamma_+(\tau)))d\tau,$$

以及

$$v'_+(\gamma_+(\sigma)) - v'_+(\gamma_+(s)) \le \int_s^\sigma L(\gamma_+(\tau), \dot{\gamma}_+(\tau), v'_+(\gamma_+(\tau)))d\tau,$$

从而

$$F(s) \le F(\sigma) + \lambda \int_s^\sigma F(\tau)d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式有 $F(s) = G(\sigma - s) \equiv 0$ 对所有 $s \in [0, \sigma]$ 成立，这与 $F(0) > 0$ 矛盾。因此 $v'_+ \ge v_+$. ∎

例 3.1 的证明. 我们已经知道对于所有 $u_- \in \mathcal{S}_-$，有 $u_+ \le u_-$. 所以只需要说明 $u_+(x) < u_2(x)$ 对于 $x \in (-1, 1]\backslash\{0\}$ 成立即可。由对称性，我们只考虑 $x \in (0, 1]$. 既然 u_+ 是半凸函数，并且满足 $u_+(x) \le u_2(x)$，正向解 u_+ 在 $x = 1$ 处不能等于 u_2. 接下来，我们假设存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $u_+(x_0) = u_2(x_0)$. 由于 $\lambda > 2$，$\lambda u_2(x) > V(x)$ 对所有 $x \in (0, 1)$ 成立。对于 $z > V(x)$，定义

$$f(x, z) = \lambda\sqrt{2(z - V(x))},$$

那么 $f(x, z)$ 在 $(0, 1) \times \{z \in \mathbb{R} :\ z > V(x)\}$ 上是 C^1 的。根据常微分方程理论，对于 $x \in (0, 1)$，$\lambda u_2(x)$ 是下面方程的唯一解

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z), \quad z(x_0) = u_2(x_0). \tag{3.5}$$

如果 u_+ 在 $(0, 1)$ 上可微，那么 u_+ 在经典的意义上满足方程 (3.2). 由于 $u_+ \le u_2$ 并且 $u_+(x_0) = u_2(x_0)$，λu_+ 是 (3.5) 的唯一解。这也就是说 $u_+ = u_2$ 在 $(0, 1)$ 上成立，与 u_+ 的半凸性质矛盾。因此，对于 $x \in (0, 1]$，有 $u_+ < u_2$.

现在还需要证明 $\bar{u}_+$ 在 $(0, 1)$ 上可微。假设存在 $y_0 \in (0, 1)$ 使得 u_+ 在 y_0 不可微。由于 u_+ 是方程 (3.2) 的唯一正向弱 KAM 解，存在 $l > 0$ 使得 $\pm l \in D^* u_+(y_0)$，这里 D^* 表示可达梯度的集合。根据 u_+ 的半凸性，它在 y_0 左边是单调递减的。由于 $u_+(0) = 0$ 并且 $u_+(y_0) \ge 0$，存在 u_+ 的局部极大值点 $z_0 \in (0, y_0)$. 由于 u_+ 的半凸性，它在 z_0 处可微，从而 $u'_+(z_0) = 0$. 由 (3.2) 我们有 $-\lambda u_+(z_0) + V(z_0) = 0$. 由于 $u'_+(x)$ 对几乎处处的 x 存在，就有 $z_1 \in (z_0, y_0)$ 使得 $u'_+(z_1)$ 存在，$|u'_+(z_1)| > 0$ 并且 $u_+(z_0) \ge u_+(z_1) \ge 0$. 我们还有 $V(z_1) > V(z_0)$. 因此

$$-\lambda\bar{u}_+(z_1) + \frac{1}{2}|\bar{u}'_+(z_1)|^2 + V(z_1) > -\lambda\bar{u}_+(z_0) + V(z_0) = 0,$$

这与 u_+ 在 z_1 处在经典的意义下满足方程 (3.2) 矛盾。

命题 3.4 给定 $\varphi \in C(M)$，有如下结论

(1) 如果 φ 满足命题 2.2 中的条件 (⊙)，那么 $T_t^+\varphi(x)$ 有无关于 t 和 φ 的界。

(2) 如果条件 (⊙) 不成立，那么有如下两种可能

(a) 存在 x_0 使得 $\varphi(x_0) > u_-(x_0)$，那么 $T_t^+\varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 的时候一致趋于 $+\infty$.

(b) $\varphi < u_-$，那么 $T_t^+\varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 的时候一致趋于 $-\infty$.

证明 陈述 (1) 的证明见 2.2. 我们需要证明陈述 (2). 我们只证明陈述 (a)，陈述 (b) 的证明是类似的。我们首先说明 $T_t^+\varphi$ 有下界。令 $y_0 \in M$ 是 $\varphi - u_-$ 的极大值点。定义 $\varphi_0(x) := \varphi(x) - (\varphi(y_0) - u_-(y_0))$，那么 $\varphi_0(x)$ 满足条件 (⊙)，故 $T_t^+\varphi_0$ 一致有界。注意到 $\varphi_0 < \varphi$. 由命题 2.1 (1)，有 $T_t^+\varphi \geq T_t^+\varphi_0$，即 $T_t^+\varphi$ 有下界。

我们首先证明 $\max_{x\in M} T_t^+\varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 的时候趋于 $+\infty$. 反之，假设存在一列 $t_n \to +\infty$ 使得 $T_{t_n}^+\varphi$ 的界为常数 C. 对于给定的 t_n，函数 $v_n(x) := T_{t_n}^+\varphi(x)$ 是定义在 M 上的有界连续函数。下面我们证明 $\varphi(x_0) \leq T_{t_n}^- v_n(x_0)$. 如若不然，则有 $\varphi(x_0) > T_{t_n}^- v_n(x_0)$ 成立。令 $\gamma : [0, t_n] \to M$ 是满足 $\gamma(t_n) = x_0$ 的 $T_{t_n}^- v_n(x_0)$ 的极小曲线。定义

$$F(s) := T_{t_n-s}^+\varphi(\gamma(s)) - T_s^- v_n(\gamma(s)), \quad s \in [0, t_n].$$

由假设 $F(t_n) > 0$. 有如下两种情况

情况 (1)：存在 $\sigma \in [0, t_n]$ 使得 $F(\sigma) = 0$ 并且 $F(s) > 0$ 对所有 $s \in (\sigma, t_n]$ 成立。由定义

$$T_s^- v_n(\gamma(s)) = T_\sigma^- v_n(\gamma(\sigma)) + \int_\sigma^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^- v_n(\gamma(\tau)))d\tau,$$

并且

$$T_{t_n-\sigma}^+\varphi(\gamma(\sigma)) \geq T_{t_n-s}^+\varphi(\gamma(s)) - \int_\sigma^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_{t_n-\tau}^+\varphi(\gamma(\tau)))d\tau,$$

从而

$$F(s) \leq F(\sigma) + \lambda \int_\sigma^s F(\tau)d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式有 $F(s) \equiv 0$ 对所有 $s \in [\sigma, t_n]$ 成立，与 $F(t_n) > 0$ 矛盾。

情况 (2)：对所有 $s \in [0, t_n]$，有 $F(s) > 0$. 由定义

$$\begin{aligned}
T_s^- v_n(\gamma(s)) =& v_n(\gamma(0)) + \int_0^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^- v_n(\gamma(\tau)))d\tau \\
=& T_{t_n}^+\varphi(\gamma(0)) + \int_0^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^- v_n(\gamma(\tau)))d\tau \\
\geq& T_{t_n-s}^+\varphi(\gamma(s)) - \int_0^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_{t_n-\tau}^+\varphi(\gamma(\tau)))d\tau \\
&+ \int_0^s L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau), T_\tau^- v_n(\gamma(\tau)))d\tau,
\end{aligned}$$

从而

$$F(s) \leq \lambda \int_0^s F(\tau)d\tau,$$

因此 $F(s) \equiv 0$，与 $F(t_n) > 0$ 矛盾。

因此 $\varphi(x_0) \leq T_{t_n}^- v_n(x_0)$. 根据命题 2.1 (1) 有

$$T_{t_n}^-(-C)(x) \leq T_{t_n}^- v_n(x) \leq T_{t_n}^- C(x), \quad \forall x \in M.$$

由定理 3.2, 极限函数 $\lim_{t\to+\infty} T_t^- \pm C(x)$ 存在，并且等于 u_-. 从而

$$\lim_{n\to+\infty} T_{t_n}^- v_n(x) = \lim_{t\to+\infty} T_t^-(\pm C)(x) = u_-(x).$$

因此

$$u_-(x_0) = \lim_{n\to+\infty} T^-_{t_n} v_n(x_0) \geq \varphi(x_0) > u_-(x_0),$$

得到矛盾。

最后我们证明当 $t \to +\infty$ 时 $T^+_t\varphi(x)$ 一致趋于 $+\infty$. 令 $W(x)$ 是 xe^x 的反函数，取 $\mu \leq W(1)/\lambda_0$. 定义 $K(t) := \max_{x\in M} T^-_t\varphi(x)$，当 $t \to +\infty$ 时它趋于 $+\infty$. 任取 $x \in M$. 如果 $T^+_{t+\mu}\varphi(x) \geq K(t)$，那么证明结束。因此我们假设 $T^+_{t+\mu}\varphi(x) < K(t)$. 令 x_t 是 $T^+_t\varphi$ 的最大值点。取测地线 $\alpha : [0,\mu] \to M$ 满足 $\alpha(0) = x_t$，$\alpha(\mu) = x$ 并且具有常速度 $\|\dot\alpha\| \leq \mathrm{diam}(M)/\mu$. 由连续性，存在 $\sigma \in [0,\mu)$ 使得 $T^+_{t+\sigma}\varphi(\alpha(\sigma)) = K(t)$ 并且 $T^+_{t+s}\varphi(\alpha(s)) < K(t)$ 对所有 $s \in (\sigma,\mu]$ 成立。从而

$$\begin{aligned} T^+_{t+s}\varphi(\alpha(s)) &\geq T^+_{t+\sigma}\varphi(\alpha(\sigma)) - \int_\sigma^s L(\alpha(\tau),\dot\alpha(\tau),0)d\tau - \lambda K(t)\mu - \lambda\int_\sigma^s (K(t) - T^+_{t+\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau \\ &\geq K(t) - \bar C_L\mu - \lambda\mu K(t) - \lambda\int_\sigma^s (K(t) - T^+_{t+\tau}\varphi(\alpha(\tau)))d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$\bar C_L := \max_{x\in M, \|\dot x\|\leq \mathrm{diam}(M)/\mu} |L(x,\dot x,0)|$$

根据性质 2.4 是有限值。利用 Gronwall 不等式，有

$$T^+_{t+s}\varphi(\alpha(s)) \geq (1 - \lambda\mu e^{\lambda\mu})K(t) - \bar C_L\mu e^{\lambda\mu}.$$

既然 $\mu \leq W(1)/\lambda_0$，有 $1 - \lambda_0\mu e^{\lambda_0\mu} > 0$. 取 $s = \mu$，我们得到 $T^+_t\varphi(x)$ 当 $t \to +\infty$ 时 $T^+_t\varphi(x)$ 一致趋于 $+\infty$. ∎

3.3 本章小结

在本章，我们着重讨论了接触 Hamilton 函数 $H(x,p,u)$ 关于 u 严格单调递增和严格单调递减两种情况。我们主要的考虑对象是定态方程 (1.2) 粘性解集的结构，以及演化方程 Cauchy 问题 (2.1) 唯一粘性解的长期行为。从物理的角度而言，单调递增情形的特征线对应于耗散效应，而单调递减情形的特征线对应于激励效应。因此，我们可以期望单调递增情形演化方程的解收敛到定态方程的解，而单调递减情形将会复杂的多。

对于单调递增情形，由于比较定理成立，分析相对简单。我们给出了定态方程粘性解集的结构刻画，并且定义了相应的共轭对与投影 Aubry 集。对于演化方程，我们证明了对于任意连续初值，相应的粘性解随着 $t \to +\infty$ 一致收敛于定态方程的唯一粘性解。本文的证明独立于已有文献的证明，并且不要求 $H(x,p,u)$ 关于 p 的严格凸性质。

对于单调递减情形，我们将它转化为考虑单调递增情形的正向弱 KAM 解和正向半群的问题。我们证明了粘性解的一致有界性，最大元的存在性，以及关于投影 Aubry 集的邻域的比较定理。对于演化方程，我们证明在不同连续初值下粘性解的长期行为并不相同。此时 Cauchy 问题的粘性解有可能趋于无穷。这一现象说明了单调递减情形比单调递增情形要更加复杂。从动力系统的角度而言，此时唯一的正向弱 KAM 解可以看作是解半群算子作用下不稳定的不动点，而当不稳定的不动点存在时，动力学复杂性就会出现。例如，文献 [72] 指出单调递减情形存在非平凡的周期解。

第 4 章　非单调情形

在本章，我们考虑接触 Hamilton 函数 $H(x,p,u)$ 关于 u 非单调的情形，具体分析了两大类关于未知函数非单调的接触型 Hamilton-Jacobi 方程。与前类似，我们依然考虑定态方程粘性解集合的结构，以及演化方程粘性解的长期行为。

4.1　广义打折方程

在本小节，我们考虑的方程如下

$$H(x,Du)+\lambda(x)u=c,\quad x\in M. \tag{4.1}$$

这里 $H:T^*M\to\mathbb{R}$ 是连续的，关于 p 凸且强制性增长，即 $\lim_{\|p\|\to+\infty}H(x,p)=+\infty$. 那么相应的 Lagrange 函数定义为

$$L(x,\dot{x}):=\sup_{p\in T_x^*M}\{\langle\dot{x},p\rangle_x-H(x,p)\},$$

并且是下半连续的，关于 $\dot{x}$ 凸。此时我们可以把第 2 章的结果应用在这类方程上。此外，连续函数 $\lambda(x)$ 满足

(±): 存在 $x_1,x_2\in M$ 使得 $\lambda(x_1)>0$ 并且 $\lambda(x_2)<0$.

从经济学角度来看，假设 (±) 可以对应于浮动的利率。也即，利率依赖于空间变量，并且负号可以变动。从理论的角度而言，这类系统是关于未知函数 u 非单调的系统，可以体现出和单调情形完全不同的性质。

4.1.1　主要结论

我们首先考虑定态方程 (4.1) 粘性解的存在性。下面的结论在 [68] 中在 Tonelli 条件下得到证明。我们进一步把结论弱化到一般 PDE 的假设之下。

定理 4.1 令

$$c_0:=\inf_{u\in C^\infty(M)}\sup_{x\in M}\Big\{H(x,Du)+\lambda(x)u\Big\}.$$

那么 c_0 是有限值。对于给定的 $c\geq c_0$，方程 (4.1) 的所有粘性下解的 $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}}$-范数是有界的。此外

(1) (4.1) 有粘性解当且仅当 $c\geq c_0$.

(2) 如果 $c>c_0$，那么 (4.1) 有至少两个粘性解。

(3) (4.1) 有最大粘性解和最小粘性解。

在第 4.1.5 小节，我们将在临界情形 $c=c_0$ 下给出粘性解唯一的例子。结合 [2] 例 3.1，临界情形下定态方程的粘性解集有很多种可能。与非临界情形 $c>c_0$ 不同，定态方程可能只有唯一的粘性解，或者有无穷多个粘性解。

在第二部分，我们考虑相应的演化方程 Cauchy 问题

$$
\begin{cases}
\partial_t u(x,t)+H(x,Du(x,t))+\lambda(x)u(x,t)=c, & (x,t)\in M\times(0,+\infty).\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in M,
\end{cases} \tag{4.2}
$$

其中 $\varphi\in C(M)$. 根据第 2 章的结果，这个 Cauchy 问题的唯一粘性解可以表示为

$$
T_t^-\varphi(x)=\inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0))+\int_0^t\Big[L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))-\lambda(\gamma(\tau))T_\tau^-\varphi(\gamma(\tau))+c\Big]\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{T-}
$$

由于方程关于未知函数非单调，我们不能像引理 3.1 那样证明 $(x,t)\mapsto T_t^-\varphi(x)$ 在 $M\times(0,+\infty)$ 上的 Lipschitz 性质。从动力学的角度而言，我们一旦得到了 $T_t^-\varphi(x)$ 的极小曲线的 Lipschitz 估计，我们就得到了 $T_t^-\varphi(x)$ 的 Lipschitz 估计。由于 H 仅仅是连续的，我们不能直接应用接触 Hamilton 方程得到 $T_t^-\varphi(x)$ 极小曲线的正则性。利用 [63] 的类似方法，我们对于某类非光滑的能量函数给出了 Erdmann 条件，见引理 C.2. 为了证明这一点，我们需要进一步加如下假设

($\star$) 对于任意 $x\in M$，$H(x,p)$ 关于 p 是严格凸的。同时存在超线性增长的函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 使得 $H(x,p)\geq\theta(\|p\|)$.

定理 4.2 假设 ($\star$) 成立。令 $u(x,t)$ 是 (4.2) 在 $c\geq c_0$ 时的粘性解。那么 $u(x,t)$ 在 $M\times(0,+\infty)$ 上局部 Lipschitz 连续。此外，存在函数 $u_{\min}^+\in C(M)$，我们称之为 (4.1) 的最小正向弱 KAM 解，使得

(1) 如果 $\varphi\geq u_{\max}$，那么当 $t\to+\infty$ 时 $u(x,t)$ 一致收敛于 $u_{\max}$.

(2) 如果存在 $x_0\in M$ 使得 $\varphi(x_0)<u_{\min}^+(x_0)$，那么当 $t\to+\infty$ 时 $u(x,t)$ 一致趋于 $-\infty$.

如果 $c>c_0$ 并且初值函数比 $u_{\min}^+$ 大，我们有如下结论

定理 4.3 假设 ($\star$) 成立。令 $u(x,t)$ 是 (4.2) 在 $c>c_0$ 时的粘性解。我们记 $u_{\min}^+$ 是 (4.1) 的最小正向弱 KAM 解。那么对于所有满足 $\varphi>u_{\min}^+$ 的初值 $\varphi\in C(M)$，粘性解 $u(x,t)$ 当 $t\to+\infty$ 时一致收敛于 $u_{\max}$.

注 4.1 值得说明的是，在定理 4.3 中，如果 $u_{\min}^+<\varphi\leq u_{\max}$，长期行为的证明是不需要假设 ($\star$) 成立的。

4.1.2 定理 4.1 的证明

命题 4.1 c_0 是有限值。

证明 取 $u(x)\equiv 0$，那么由定义

$$
c_0\leq\sup_{x\in M}H(x,0)<+\infty.
$$

定义

$$\mathbf{e}_0 := \min_{(x,p)\in T^*M} H(x,p) > -\infty.$$

由假设 (±)，存在 $x_0 \in M$ 使得 $\lambda(x_0) = 0$. 因此对于所有 $u \in C^\infty(M)$，有

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u\in C^\infty(M)} \sup_{x\in M} \left\{ H(x, Du(x)) + \lambda(x)u(x) \right\} \\ &\geqslant \inf_{u\in C^\infty(M)} \left\{ H(x_0, Du(x_0)) + \lambda(x_0)u(x_0) \right\} \\ &= \inf_{u\in C^\infty(M)} H(x_0, Du(x_0)) \geqslant \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

因此 c_0 是有限值。 ∎

命题 4.2 对于 $c < c_0$，方程 (4.1) 没有连续粘性下解。

证明 假设对于 $c < c_0$，方程 (4.1) 有连续粘性下解 $u : M \to \mathbb{R}$. 令

$$\lambda_0 := \|\lambda(x)\|_\infty > 0. \tag{4.3}$$

由粘性下解的定义，对于所有 $p \in D^+u(x)$，有

$$H(x,p) \leq c - \lambda(x)u(x) \leq c + \lambda_0\|u\|_\infty.$$

由 H 关于 p 的强制增长性，函数 u 是 Lipschitz 连续的。根据 [47] 引理 2.2，对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $u_\varepsilon \in C^\infty(M)$ 使得 $\|u - u_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$，并且对所有 $x \in M$ 有

$$H(x, Du_\varepsilon(x)) + \lambda(x)u(x) \leq c + \varepsilon.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2(1+\lambda_0)}(c_0 - c) > 0$，有

$$\begin{aligned} & H(x, Du_\varepsilon(x)) + \lambda(x)u_\varepsilon(x) \\ \leqslant\ & H(x, Du_\varepsilon(x)) + \lambda(x)u(x) + \lambda_0\|u - u_\varepsilon\|_\infty \\ \leqslant\ & c + (1+\lambda_0)\varepsilon < c_0, \end{aligned}$$

这与 c_0 的定义矛盾。 ∎

这里我们依然记 $T_t^\pm$ 为下面 Lagrange 函数定义的正负向解半群

$$L(x,\dot{x}) - \lambda(x)u(x) + c.$$

引理 4.1 令 $\varphi \in C(M)$.

(1) $T_t^-\varphi$ 有无关于 t 的上界。

(2) $T_t^+\varphi$ 有无关于 t 的下界。

证明 取 $x_1 \in M$ 满足 $\lambda(x_1) > 0$. 我们首先证明

$$T_t^- \varphi(x_1) \le \max\left\{\varphi(x_1), \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}\right\}, \quad \forall t \ge 0.$$

若不然，存在 $t > 0$ 使得

$$T_t^- \varphi(x_1) > \max\left\{\varphi(x_1), \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}\right\} \ge \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}.$$

那么存在两种情况：

(i) 对于所有 $s \in [0,t]$ 有

$$T_s^- \varphi(x_1) > \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}.$$

取常数曲线 $\gamma \equiv x_1$，有

$$T_t^- \varphi(x_1) \le \varphi(x_1) + \int_0^t \Big[L(x_1,0) + c - \lambda(x_1) T_s^- \varphi(x_1)\Big] ds < \varphi(x_1),$$

导出矛盾。

(ii) 存在 $t_0 \ge 0$ 使得

$$T_{t_0}^- \varphi(x_1) = \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)},$$

并且

$$T_s^- \varphi(x_1) > \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}, \quad \forall s \in (t_0, t].$$

取常数曲线 $\gamma \equiv x_1$，有

$$T_t^- \varphi(x_1) \le T_{t_0}^- \varphi(x_1) + \int_0^t \Big[L(x_1,0) + c - \lambda(x_1) T_s^- \varphi(x_1)\Big] ds < \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)},$$

导出矛盾。

接下来我们证明对于所有 $x \in M$ 和 $t > 0$，$T_t^- \varphi(x)$ 是上有界的。我们只需要说明对于所有 $x \in M$ 和 $t > 0$，$T_{t+\mu}^- \varphi(x)$ 是有上界的，这里 μ 的定义见引理 2.5，其中 $L(x, \dot{x}, 0)$ 取为这里的 $L(x, \dot{x})$. 令 $\alpha : [0, \mu] \to M$ 是连接 x_1 和 x 的常速测地线，那么 $\|\dot{\alpha}\| \le \delta$. 令

$$K_0 := \max\left\{\varphi(x_1), \frac{L(x_1,0)+c}{\lambda(x_1)}\right\}.$$

给定 $x \ne x_1$. 我们假设 $T_{t+\mu}^- \varphi(x) > K_0$. 否则证明结束。由于 $T_t^- \varphi(x_1) \le K_0$, 存在 $\sigma \in [0, \mu)$ 使得 $T_{t+\sigma}^- \varphi(\alpha(\sigma)) = K_0$ 并且 $T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) > K_0$ 对所有 $s \in (\sigma, \mu]$ 成立。由定义

$$\begin{aligned}
T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) &\le T_{t+\sigma}^- \varphi(\alpha(\sigma)) + \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) - \lambda(\alpha(\tau)) \cdot T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) + c\Big] d\tau \\
&= K_0 + \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) - \lambda(\alpha(\tau)) \cdot T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) + c\Big] d\tau,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) - K_0 \le \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) - \lambda(\alpha(\tau)) \cdot T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) + c\Big] d\tau \\
&\le \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) - \lambda(\alpha(\tau)) \cdot K_0 + c\Big] d\tau + \lambda_0 \int_\sigma^s \Big[T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) - K_0\Big] d\tau \\
&\le L_0 \mu + \lambda_0 \int_\sigma^s \Big[T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) - K_0\Big] d\tau,
\end{aligned}$$

其中 λ_0 的定义见 (4.3) 并且

$$L_0 := C_L + \lambda_0 K_0 + c.$$

这里 C_L 的定义见引理 2.5，其中 $L(x,\xi,0) \le \bar{C}$ 在这里写作 $L(x,\xi) \le C_L$. 利用 Gronwall 不等式，我们有

$$T^-_{t+s}\varphi(\alpha(s)) - K_0 \le L_0 \mu e^{\lambda_0(s-\sigma)} \le L_0 \mu e^{\lambda_0 \mu}, \quad \forall s \in (\sigma, \mu].$$

取 $s=\mu$ 有 $T^-_{t+\mu}\varphi(x) \le K_0 + L_0 \mu e^{\lambda_0\mu}$.

类似于上面的讨论，取常数曲线 $\gamma(\tau) \equiv x_2$ 对 $\tau \in [0,t]$ 成立，并且把 $T^-_{t+\mu}\varphi$ 替换成 $T^+_{t-\mu}\varphi$，可以证明

$$T^+_t\varphi(x) \ge \min\left\{\varphi(x_2), \frac{L(x_2,0)+c}{\lambda(x_2)}\right\} - L_0\mu e^{\lambda_0\mu}. \tag{4.4}$$

我们略去证明。 ∎

推论 4.1 令 u_0 是方程 (4.1) 的 Lipschitz 连续的粘性下解。那么 $T^-_t u_0$ (resp. $T^+_t u_0$) 有和 t 与 u_0 无关的上界 (resp. 下界)。

证明 我们只证明 $T^-_t u_0$ 有和 t 与 u_0 无关的上界。对于 $T^+_t u_0$ 证明是类似的。令

$$\mathbf{e}_0 := \min_{(x,p)\in T^*M} H(x,p). \tag{4.5}$$

由于 H 关于 p 的强制性增长，$\mathbf{e}_0 > -\infty$. 由粘性下解的定义，$H(x_1,p) + \lambda(x_1)u_0(x_1) \leqslant c$ 对所有 $p \in D^*u_0(x_1)$ 成立，其中 D^* 表示可达梯度。从而

$$\lambda(x_1)u_0(x_1) \leqslant c - \min_{(x,p)\in T^*M} H(x,p) = c - \mathbf{e}_0.$$

因此，对于所有的粘性下解 u_0，有

$$u_0(x_1) \le \frac{c-\mathbf{e}_0}{\lambda(x_1)}.$$

令

$$K_0 := \frac{c-\mathbf{e}_0}{\lambda(x_1)}, \quad L_0 := C_L + \lambda_0 K_0 + c,$$

其中 λ_0 由 (4.3) 定义。我们注意到

$$L(x_1,0) + c = \sup_{p\in T^*_x M}(-H(x_1,p)) + c \le -\min_{(x,p)\in T^*M} H(x,p) + c = c - \mathbf{e}_0.$$

由引理 4.1，有

$$T^-_t u_0(x) \leqslant K_0 + L_0\mu e^{\lambda_0\mu}. \tag{4.6}$$

∎

命题 4.3 存在常数 $C>0$ 使得对于 (4.1) 的任意粘性下解 $u : M \to \mathbb{R}$，有

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} \leqslant C.$$

证明 由引理 B.2，对所有 $t \geq 0$，

$$T_t^+ u \leq u \leq T_t^- u.$$

由推论 4.1，存在 C_1, C_2 与 u 无关，使得

$$C_2 \leq u \leq C_1.$$

对于任意 $x, y \in M$，令 $\alpha : [0, d(x,y)/\delta] \to M$ 是长度为 $d(x,y)$ 速度恒为 $\|\dot{\alpha}\| = \delta$ 的测地线，连接 x 和 y. 那么

$$L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) \leq C_L, \quad \forall s \in [0, d(x,y)/\delta].$$

由引理 B.1，

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &\leq \int_0^{d(x,y)/\delta} \Big[L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) - \lambda(\alpha(s)) u(\alpha(s)) + c \Big] ds \\ &\leq \frac{1}{\delta} \Big(C_L + \lambda_0 \max\{|C_1|, |C_2|\} + c \Big) d(x,y) =: \kappa d(x,y). \end{aligned}$$

注意到这里 κ 与粘性下解 u 无关。交换 x 和 y，得到 u 的等度 Lipschitz 连续性。 ∎

命题 4.4 对于 $c \geq c_0$，方程 (4.1) 有 Lipschitz 连续的粘性下解。令 u_0 是 (4.1) 在 $c = c_0$ 时候的粘性下解，对于 $c > c_0$ 有

$$T_t^+ u_0 < u_0 < T_t^- u_0.$$

证明 由 c_0 的定义，存在 $u_n \in C^\infty(M)$ 使得对所有 $x \in M$，有

$$H(x, Du_n(x)) + \lambda(x) u_n(x) \leqslant c_0 + \frac{1}{n}. \tag{4.7}$$

也即 u_n 使下面方程的粘性下解

$$H(x, Du) + \lambda(x) u = c_0 + \frac{1}{n},$$

由命题 4.3，$\{u_n\}_{n \geq 1}$ 是一致有界等度 Lipschitz 连续的。根据 Ascoli-Arzelà 定理，存在子列 $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 在 M 上一致收敛于 $u_0 \in \mathrm{Lip}(M)$. 由粘性下解的稳定性，u_0 是下面方程的粘性下解

$$H(x, Du) + \lambda(x) u = c_0.$$

此外，对于 $c > c_0$ 和几乎处处的 $x \in M$，有

$$H(x, Du_0) + \lambda(x) u_0 + (c - c_0) \leq c.$$

由引理 B.2，

$$T_t^+ u_0 < u_0 < T_t^- u_0.$$ ∎

命题 4.5 令 u_0 是 (4.1) 的 Lipschitz 连续的粘性下解，那么

$$u_- := \lim_{t \to +\infty} T_t^- u_0(x), \quad u_+ := \lim_{t \to +\infty} T_t^+ u_0(x)$$

存在，极限过程是一致于 x 的。此外，u_- 是 (4.1) 的粘性解，u_+ 是 (4.1) 的正向弱 KAM 解。因此 (4.1) 在 $c \geq c_0$ 时有解。

证明 我们只证明 $u_- := \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0(x)$ 存在，并且是 (4.1) 的粘性解。极限函数 u_+ 的存在性是类似的。由注 2.1，

$$\check{u}_-(x) := \lim_{r\to 0+} \inf\{T_t^- u_0(y) : d(x,y) < r,\ t > 1/r\}$$

是 (4.1) 的粘性解。推论 4.1 说明点点极限 $\lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0(x)$ 存在并且满足 $\check{u}_-(x) \le \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0(x)$. 由于 $T_t^- u_0$ 关于 t 是单调递增的，有

$$\begin{aligned} T_t^- u_0(x) &= \lim_{r\to 0+} \inf\{T_t^- u_0(y) : d(x,y) < r\} \\ &\le \lim_{r\to 0+} \inf\{T_{t+s}^+ u_0(y) : d(x,y) < r,\ t+s > 1/r\} = \check{u}_-(x). \end{aligned}$$

那么 $\lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0 = \check{u}_-$，是 (4.1) 的一个粘性解。根据 Dini 定理，$T_t^- u_0$ 一致收敛于 $\check{u}_-$. ∎

结合命题 4.2，4.4 和 4.5，(4.1) 有解当且仅当 $c \ge c_0$. 现在我们考虑非临界情形。

命题 4.6 对于 $c > c_0$，方程 (4.1) 至少有两个粘性解。

证明 由命题 4.4，如果 $c > c_0$，存在 (4.1) 的严格粘性下解 u_0. 因此对于 $t > 0$，

$$T_t^- u_0(x) > u_0(x), \quad T_t^+ u_0(x) < u_0(x). \tag{4.8}$$

记

$$u_- := \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0(x), \quad u_+ := \lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_0(x). \tag{4.9}$$

以及

$$v_- := \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+(x). \tag{4.10}$$

由命题 4.5，u_- 和 v_- 是方程 (4.1) 的粘性解。

现在我们说明 $u_- \ne v_-$. 假设 $u_- \equiv v_-$ 在 M 上恒成立。由 (4.10)，有

$$u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+(x). \tag{4.11}$$

根据 (4.11)，由定理 2.3

$$\mathcal{I}_{u_+} := \{x \in M : u_-(x) = u_+(x)\} \ne \varnothing. \tag{4.12}$$

另一方面，由 (4.8) 以及 (4.9)，对于所有 $x \in M$，有

$$u_+(x) < u_0(x) < u_-(x), \tag{4.13}$$

从而

$$\mathcal{I}_{u_+} = \varnothing.$$

这与 (4.12) 矛盾。 ∎

命题 4.7 方程 (4.1) 有最大粘性解。

证明 注意到所有粘性解都是粘性下解，由命题 4.3，存在 C_1 和 C_2 使得 $C_2 \le u_- \le C_1$ 对所有 $u_- \in \mathcal{S}_-$ 成立。注意到 (4.1) 的粘性解都是 T_t^- 的不动点。取连续函数 $\varphi > C_1$ 作为初值。由命题 2.1 (1)，$T_t^-\varphi$ 比 (4.1) 的粘性解都要大。由引理 4.1(1)，$T_t^-\varphi$ 有无关于 t 的上界。由注 2.1，下半极限

$$\check{\varphi}(x) = \lim_{r\to 0+} \inf\{T_t^-\varphi(y) : \ d(x,y) < r, \ t > 1/r\}$$

是 (4.1) 的 Lipschitz 连续的粘性解。由于 $T_t^-\varphi$ 比 (4.1) 所有的粘性解都大，有

$$\begin{aligned}\check{\varphi}(x) &= \lim_{r\to 0+} \inf\{T_t^-\varphi(y) : \ d(x,y) < r, \ t > 1/r\}\\ &\ge \lim_{r\to 0+} \inf\{v_-(y) : \ d(x,y) < r\} = v_-(x),\end{aligned}$$

对所有 $v_- \in \mathcal{S}_-$ 成立。因此 $\check{\varphi}(x)$ 是方程 (4.1) 的最大粘性解。 ∎

命题 4.8 方程 (4.1) 有最小正向弱 KAM 解。

证明 既然所有的正向弱 KAM 解都被 $L(x,\dot{x}) - \lambda(x)u + c$ 控制，根据命题 B.3，它是 (4.1) 的粘性下解。由命题 4.3，存在 C_1 和 C_2 使得 $C_2 \le u_+ \le C_1$ 对所有 $u_+ \in \mathcal{S}_+$ 成立。取连续函数 $\varphi < C_2$ 作为初值，由命题 2.1 (1)，$T_t^+\varphi$ 比 (4.1) 的任何一个正向弱 KAM 解都要小。由引理 4.1(2)，$T_t^+\varphi$ 有无关于 t 的下界。由命题 2.1 (2)，上半极限

$$\hat{\varphi}(x) = \lim_{r\to 0+} \sup\{T_t^+\varphi(y) : \ d(x,y) < r, \ t > 1/r\}$$

是 (4.1) 的一个正向弱 KAM 解. 既然 $T_t^+\varphi$ 比 (4.1) 任意的正向弱 KAM 解都要小，有

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(x) &= \lim_{r\to 0+} \sup\{T_t^+\varphi(y) : \ d(x,y) < r, \ t > 1/r\}\\ &\le \lim_{r\to 0+} \sup\{v_+(y) : \ d(x,y) < r\} = v_+(x).\end{aligned}$$

对所有 $v_+ \in \mathcal{S}_+$ 成立。因此 $\hat{\varphi}(x)$ 是 (4.1) 的最小正向弱 KAM 解。 ∎

由定理 2.3，$\hat{\varphi}_\infty := \lim_{t\to+\infty} T_t^-\hat{\varphi}$ 存在，并且是 (4.1) 的粘性解。

引理 4.2 $\hat{\varphi}_\infty$ 是方程 (4.1) 的最小粘性解。

证明 定义

$$\mathcal{P}_- := \{u_- \in \mathcal{S}_- : \ \exists u_+ \in \mathcal{S}_+ \text{ such that } u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+\}.$$

我们首先证明对于 $v_- \in \mathcal{P}_-$，有 $v_- \ge \hat{\varphi}_\infty$. 由 $\mathcal{P}_-$ 的定义，存在 $u_+ \in \mathcal{S}_+$ 使得 $v_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+$. 由于 $\hat{\varphi}$ 是最小正向弱 KAM 解，我们有 $u_+ \ge \hat{\varphi}$. 作用 T_t^- 再令 $t \to +\infty$，我们有 $v_- \ge \hat{\varphi}_\infty$.

我们接着证明对于所有 $v_- \in \mathcal{S}_-\backslash\mathcal{P}_-$，$v_- \ge \hat{\varphi}_\infty$ 依然成立。令 $v_+ := \lim_{t\to+\infty} T_t^+ v_-$ 以及 $u_- := \lim_{t\to+\infty} T_t^- v_+$. 那么 $u_- \in \mathcal{P}_-$，得到 $u_- \ge \hat{\varphi}_\infty$. 根据推论 2.2，$v_+ \le v_-$. 因此 $T_t^- v_+ \le T_t^- v_- = v_-$. 令 $t \to +\infty$ 我们得到 $u_- \le v_-$. 因此 $v_- \ge u_- \ge \hat{\varphi}_\infty$. ∎

4.1.3　定理 4.2 的证明

初值在最大粘性解之上

令 $\varphi \geq u_{\max}$. 那么 $T_t^- \varphi \geq u_{\max}$. 结合引理 4.1(1)，$T_t^- \varphi(x)$ 有无关于 t 的界，因此点点极限

$$\bar{u}(x) := \limsup_{t \to +\infty} T_t^- \varphi(x)$$

存在。假设条件 $(\star)$ 成立，根据推论 C.1，函数族 $\{T_t^- \varphi(x)\}_{t \geq 1}$ 是等度 Lipschitz 连续的。我们记 κ 为 $T_t^- \varphi(x)$ 关于 x 的 Lipschitz 常数。由于

$$|\sup_{s \geq t} T_s^- \varphi(x) - \sup_{s \geq t} T_s^- \varphi(y)| \leq \sup_{s \geq t} |T_s^- \varphi(x) - T_s^- \varphi(y)| \leq \kappa d(x, y),$$

极限过程

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \to +\infty} \sup_{s \geq t} T_s^- \varphi(x)$$

关于 x 是一致的。因此函数 $\bar{u}(x)$ 是 Lipschitz 连续的。我们断言 $\bar{u}$ 是一个粘性下解。如果这个断言成立，由命题 4.5，$\lim_{t \to +\infty} T_t^- \bar{u}(x)$ 存在，并且是 (4.1) 的粘性解。既然 $T_t^- \varphi \geq u_{\max}$，有 $\bar{u} \geq u_{\max}$. 故 $\lim_{t \to +\infty} T_t^- \bar{u} = u_{\max}$. 由注 2.1，下半极限 $\check{\varphi} = u_{\max}$. 由 $\check{\varphi}$ 的定义，有

$$\liminf_{t \to +\infty} T_t^- \varphi(x) \geq \check{\varphi}(x) = u_{\max}.$$

另一方面

$$\limsup_{t \to +\infty} T_t^- \varphi(x) = \bar{u}(x) \leq \lim_{t \to +\infty} T_t^- \bar{u}(x) = u_{\max}(x).$$

从而当 $t \to +\infty$ 时 $\lim_{t \to +\infty} T_t^- \varphi = u_{\max}$.

现在我们证明 $\bar{u}$ 是一个粘性下解。由 B.3，我们只需要证明 $T_t^- \bar{u}$ 关于 t 单调非减。

首先我们断言对于任意 $\varepsilon > 0$，存在与 x 无关的常数 $s_0 > 0$ 使得对所有 $s \geq s_0$，

$$T_s^- \varphi(x) \leq \bar{u}(x) + \varepsilon.$$

固定 $x \in M$，由上极限的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $s_0(x) > 0$ 使得对所有 $s \geq s_0(x)$，

$$T_s^- \varphi(x) \leq \bar{u}(x) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $r := \frac{\varepsilon}{3\kappa}$. 对于 $s \geq s_0(x)$，有

$$\begin{aligned} T_s^- \varphi(y) &\leq T_s^- \varphi(x) + \kappa d(x, y) \leq \bar{u}(x) + \frac{\varepsilon}{3} + \kappa d(x, y) \\ &\leq \bar{u}(y) + \frac{\varepsilon}{3} + 2\kappa d(x, y) \leq \bar{u}(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in B_r(x). \end{aligned}$$

由 M 的紧性，存在有限个 $x_i \in M$ 使得对每个 $y \in M$，存在一点 x_i 使得 $y \in B_r(x_i)$. 令 $s_0 := \max_i s_0(x_i)$ 断言成立。

由命题 2.1，对任意 $t > 0$ 有

$$T_t^-(T_s^- \varphi(x)) \leq T_t^-(\bar{u}(x) + \varepsilon) \leq T_t^- \bar{u}(x) + \varepsilon e^{\lambda_0 t},$$

其中 $\lambda_0 := \|\lambda(x)\|_\infty > 0$. 取极限 $s \to +\infty$，有

$$\bar{u}(x) = \limsup_{s \to +\infty} T_t^-(T_s^- \varphi(x)) \leq T_t^- \bar{u}(x) + \varepsilon e^{\lambda_0 t}.$$

令 $\varepsilon \to 0+$ 有 $\bar{u}(x) \leq T_t^- \bar{u}(x)$，也即 $T_t^- \bar{u}(x)$ 关于 t 单调非减。

初值有一点在最小正向解之下

我们已经证明了对于 $\varphi \geq u_{\max}$，有 $\lim_{t\to+\infty} T_t^-\varphi = u_{\max}$，并且收敛是一致的。结合定义 2.1 和命题 B.2，可以证明

引理 4.3 令 $\varphi \in C(M)$. 如果 $\varphi \leq u_{\min}^+$，那么 $\lim_{t\to+\infty} T_t^+\varphi = u_{\min}^+$，并且收敛是一致的。

引理 4.4 对所有 $\varphi \in C(M)$，$T_t^+ \circ T_t^-\varphi \leq \varphi \leq T_t^- \circ T_t^+\varphi$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。

证明 我们只证明 $\varphi \leq T_t^- \circ T_t^+\varphi$，另一边的证明是类似的。若不然，假设存在 $x \in M$ 和 $t > 0$ 使得

$$T_t^- \circ T_t^+\varphi(x) < \varphi(x).$$

令 $\gamma : [0,t] \to M$ 满足 $\gamma(t) = x$ 是 $T_t^- \circ T_t^+\varphi(x)$ 的极小曲线，定义

$$F(s) := T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)) - T_s^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(s)).$$

那么 $F(0) = 0$ 并且 $F(t) > 0$. 由连续性，存在 $\sigma \in [0,t)$ 使得 $F(\sigma) = 0$ 并且 $F(\tau) > 0$ 对所有 $\tau \in (\sigma, t]$ 成立。，由定义，对于 $s \in (\sigma, t]$ 有

$$\begin{aligned}
T_s^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(s)) &= T_\sigma^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(\sigma)) + \int_\sigma^s \Big[L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau)) - \lambda(\gamma(\tau))T_\tau^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(\tau)) + c\Big]d\tau \\
&= T_{t-\sigma}^+\varphi(\gamma(\sigma)) + \int_\sigma^s \Big[L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau)) - \lambda(\gamma(\tau))T_\tau^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(\tau)) + c\Big]d\tau \\
&\geq T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)) - \int_\sigma^s \Big[L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau)) - \lambda(\gamma(\tau))T_{t-\tau}^+\varphi(\gamma(\tau)) + c\Big]d\tau \\
&\quad + \int_\sigma^s \Big[L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau)) - \lambda(\gamma(\tau))T_\tau^- \circ T_t^+\varphi(\gamma(\tau)) + c\Big]d\tau \\
&\geq T_{t-s}^+\varphi(\gamma(s)) - \lambda_0 \int_\sigma^s F(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

从而

$$F(s) \leq \lambda_0 \int_\sigma^s F(\tau)d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式，有 $F(s) \equiv 0$ 对所有 $s \in [\sigma, t]$ 成立，这与 $F(t) > 0$ 矛盾。 ∎

引理 4.5 令 $\varphi \in C(M)$ 并且存在一点 $x_0 \in M$ 使得 $\varphi(x_0) < u_{\min}^+(x_0)$，那么 $T_t^-\varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 时一致趋于 $-\infty$.

证明 我们首先证明 $\min_{x\in M} T_t^-\varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 时趋于 $-\infty$. 若不然，假设存在一个常数 K_1 和一列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $T_{t_n}^-\varphi \geq K_1$. 由引理 4.1，$T_{t_n}^-\varphi$ 同时也有一个无关于 t 的上界。因此，函数 $v_n(x) := T_{t_n}^-\varphi(x)$ 对每个 n 是有界的连续函数。由引理 4.4，我们有 $\varphi(x_0) \geq T_{t_n}^+ v_n(x_0)$. 由命题 4.3，所有的粘性下解都是有界的。记 K_2 为它们的下界。记 $K' := \min\{K_1, K_2\}$，那么 $T_{t_n}^+ v_n \geq T_{t_n}^+ K'$. 由引理 4.1(2)，$T_t^+ K'$ 有无关于 t 的下界。由于 $K' \leq K_2$，$T_t^+ K'$ 比 (4.1) 的任意正向解都要小。由引理 4.3，$\lim_{t\to+\infty} T_t^+ K'$ 存在并且等于 $u_{\min}^+$. 我们得到

$$u_{\min}^+(x_0) \leq \limsup_n T_{t_n}^+ v_n(x_0) \leq \varphi(x_0) < u_{\min}^+(x_0),$$

这导致了矛盾。

接着我们证明当 $t \to +\infty$ 时 $T_t^- \varphi(x)$ 一致趋于 $-\infty$. 记 $W(x)$ 是 xe^x 的反函数。取 $\mu \le W(1)/\lambda_0$. 定义 $K(t) := \min_{x\in M} T_t^- \varphi(x)$，它在 $t \to +\infty$ 时趋于 $-\infty$. 任取 $x \in M$. 如果 $T_{t+\mu}^- \varphi(x) \le K(t)$，那么证明结束。所以我们假设 $T_{t+\mu}^- \varphi(x) > K(t)$. 令 x_t 是 $T_t^- \varphi$ 的最小值点。取测地线 $\alpha : [0, \mu] \to M$ 满足 $\alpha(0) = x_t$，$\alpha(\mu) = x$ 以及常速度 $\|\dot\alpha\| \le \mathrm{diam}(M)/\mu$. 由连续性，存在 $\sigma \in [0, \mu)$ 使得 $T_{t+\sigma}^- \varphi(\alpha(\sigma)) = K(t)$ 以及 $T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) > K(t)$ 对所有 $s \in (\sigma, \mu]$ 成立。那么

$$
\begin{aligned}
&T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) \le T_{t+\sigma}^- \varphi(\alpha(\sigma)) + \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot\alpha(\tau)) - \lambda(\alpha(\tau)) \cdot T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) + c\Big] d\tau \\
&\le K(t) + \int_\sigma^s \Big[L(\alpha(\tau), \dot\alpha(\tau)) - \lambda_0 K(t) + c\Big] d\tau + \lambda_0 \int_\sigma^s \Big[T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) - K(t)\Big] d\tau \\
&\le K(t) + \bar C_L \mu - \lambda_0 \mu K(t) + \lambda_0 \int_\sigma^s \Big[T_{t+\tau}^- \varphi(\alpha(\tau)) - K(t)\Big] d\tau,
\end{aligned}
$$

其中由假设 $(\star)$

$$
\bar C_L := \max_{x\in M, \|\dot x\| \le \mathrm{diam}(M)/\mu} |L(x, \dot x) + c|
$$

对固定的 μ 是有限的。由 Gronwall 不等式，有

$$
T_{t+s}^- \varphi(\alpha(s)) \le \bar C_L \mu e^{\lambda_0 \mu} + (1 - \lambda_0 \mu e^{\lambda_0 \mu}) K(t).
$$

由于 $\mu \le W(1)/\lambda_0$，有 $1 - \lambda_0 \mu e^{\lambda_0 \mu} > 0$. 取 $s = \mu$，我们得到 $T_t^- \varphi(x)$ 在 $t \to +\infty$ 时趋于 $-\infty$.∎

4.1.4　定理 4.3 的证明

由命题 4.4，对于 $c \ge c_0$，(4.1) 有 Lipschitz 连续的粘性下解。令 u_0 是 (4.1) 在 $c = c_0$ 时的粘性下解。对于 $c > c_0$，有

$$
T_t^+ u_0 < u_0 < T_t^- u_0.
$$

由命题 4.6 我们可以通过 u_0 构造两个 (4.1) 的粘性解 u_- 和 v_-. 具体而言

$$
u_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_0,\ u_+ = \lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_0,\ \ v_- = \lim_{t\to+\infty} T_t^- u_+. \tag{4.14}
$$

显然 $u_+ < u_0 < u_-$.

引理 4.6　令 $c > c_0$. 对每个 $\alpha \in (0, 1]$ 和每个 (4.1) 的粘性解 w_-，凸组合

$$
u_\alpha := \alpha u_0 + (1 - \alpha) w_-
$$

是 (4.1) 的一个严格粘性下解。特别地，有 $T_t^+ u_\alpha < u_\alpha < T_t^- u_\alpha$.

证明　由于 u_0 是 (4.1) 在 $c = c_0$ 时的一个 Lipschitz 连续的粘性下解，有

$$
H(x, Du_0(x)) + \lambda(x) u_0(x) + (c - c_0) \le c, \quad a.e\ x \in M.
$$

由于 w_- 是 (4.1) 的一个粘性解，有

$$
H(x, Dw_-(x)) + \lambda(x) w_-(x) = c, \quad a.e.\ x \in M.
$$

因此

$$\alpha H(x, Du_0(x)) + (1-\alpha)H(x, Dw_-(x)) \\ + \lambda(x)\Big(\alpha u_0(x) + (1-\alpha)w_-(x)\Big) + \alpha(c - c_0) \le c, \quad a.e.\ x \in M.$$

由 $H(x,p)$ 关于 p 的凸性，Jensen 不等式给出

$$H(x, Du_\alpha(x)) + \lambda(x)u_\alpha(x) \le (1-\alpha)c + \alpha c_0, \quad a.e.\ x \in M.$$

令 $\epsilon_0 := \alpha(c - c_0) > 0$. 那么

$$H(x, Du_\alpha(x)) + \lambda(x)u_\alpha(x) + \epsilon_0 \le c, \quad a.e.\ x \in M.$$

根据引理 B.2，$T_t^+ u_\alpha < u_\alpha < T_t^- u_\alpha$. ∎

引理 4.7 令 $c > c_0$. 根据 (4.14) 定义 u_- 和 v_-. 那么 u_- 是 (4.1) 的最大粘性解，并且 v_- 是 (4.1) 的最小粘性解。

证明 我们首先证明不存在与 u_- 不同的 w_- 满足 $w_- \ge u_-$. 假设存在这样的 w_-. 由于 $u_0 < u_- \le w_-$，存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $u_\alpha = \alpha u_0 + (1-\alpha)w_-$ 满足

$$\min_{x\in M}(u_-(x) - u_\alpha(x)) = 0.$$

令 $x_0 \in M$ 是上面最小值取得的点，那么

$$T_t^- u_\alpha \le T_t^- u_-.$$

由引理 4.6，有 $T_t^- u_\alpha(x_0) > u_\alpha(x_0) = u_-(x_0) = T_t^- u_-(x_0)$，得到矛盾。

现在我们证明 $w_- \le u_-$ 对所有的粘性解 w_- 成立。假设存在一个粘性解 w_- 满足

$$\max_{x\in M}(w_-(x) - u_-(x)) > 0.$$

令 $y_0 \in M$ 是上面最大值取得的点。那么函数 $\bar{u}(x) := \max\{u_-(x), w_-(x)\}$ 是一个粘性下解。由命题 4.5，我们可以得到一个粘性解 $\bar{w}_- := \lim_{t\to+\infty} T_t^- \bar{u}$. 我们有

$$\bar{w}_-(y_0) \ge \bar{u}(y_0) = w_-(y_0) > u_-(y_0),$$

根据前面的分析，我们得到矛盾。

类似于前面的讨论，我们可以证明 u_+ 是 (4.1) 的最小正向弱 KAM 解。根据引理 4.2，v_- 是 (4.1) 的最小粘性解。 ∎

注意到 u_0 是 (4.1) 中取 $c = c_0$ 的粘性下解。对于 $c > c_0$，有

$$T_t^+ u_0 < u_0 < T_t^- u_0.$$

由命题 2.1(1) 和引理 4.4，有

$$T_{t+s}^- u_0 \ge T_{t+s}^- \circ T_t^+ u_0 = T_s^- \circ (T_t^- \circ T_t^+ u_0) \ge T_s^- u_0$$

对所有 $t, s \geq 0$ 成立。令 $s \to +\infty$ 有

$$\lim_{s \to +\infty} T^-_{t+s} \circ T^+_t u_0 = u_{\max}, \tag{4.15}$$

对所有 $t > 0$ 成立。令 $\varphi \in C(M)$ 满足 $u^+_{\min} < \varphi \leq u_{\max}$. 由引理 4.7，$u^+_{\min} = \lim_{t\to+\infty} T^+_t u_0$，存在 $t_0 > 0$ 使得 $T^+_{t_0} u_0 \leq \varphi$. 那么

$$T^-_{t_0+s} \circ T^+_{t_0} u_0 \leq T^-_{t_0+s}\varphi \leq u_{\max}.$$

令 $s \to +\infty$ 并且根据 (4.15)，有

$$\lim_{t\to+\infty} T^-_t \varphi = u_{\max}.$$

现在我们假设条件 $(\star)$ 成立。那么对于 $\varphi > u^+_{\min}$，存在 φ_1 和 φ_2 使得

$$\varphi_1 \geq u_{\max}, \quad u^+_{\min} < \varphi_2 \leq u_{\max}, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1.$$

那么有 $T^-_t \varphi_2 \leq T^-_t \varphi \leq T^-_t \varphi_1$. 既然对于 $i = 1, 2$ 都有 $\lim_{t\to+\infty} T^-_t \varphi_i = u_{\max}$，有

$$\lim_{t\to+\infty} T^-_t \varphi = u_{\max}.$$

证明完毕。

4.1.5　临界情形下粘性解唯一的例子

文献 [2] 详细分析了下面的例子

例 4.1

$$\frac{1}{2}|u'(x)|^2 + \sin x \cdot u(x) = c, \quad x \in \mathbb{S}^1 \simeq [0, 2\pi). \tag{4.16}$$

可以证明 $c_0 = 0$ 并且在临界情形下 (4.16) 有不可数无穷多个粘性解。作为补充，我们考虑如下例子

例 4.2

$$\frac{1}{2}|u'(x)|^2 + \sin x \cdot u(x) + \cos 2x - 1 = c, \quad x \in \mathbb{S}^1 \simeq [0, 2\pi). \tag{4.17}$$

我们将要证明，临界值 $c_0 = 0$，但是临界情形下 (4.17) 只有唯一的粘性解。方程 (4.17) 的 Hamilton 函数为

$$H(x, u, p) = \frac{p^2}{2} + \sin x \cdot u + \cos 2x - 1. \tag{4.18}$$

证明　我们首先说明 $c_0 = 0$. 如果 $c < 0$ 时方程 (4.17) 有一个光滑下解 u_0，那么 $|u_0'(0)|^2 \leq 2c < 0$，这是不可能的。当 $c = 0$，常数函数 $\varphi \equiv 0$ 是 (4.17) 的一个下解。因此 $c_0 = 0$. 由命题 4.5，存在 (4.17) 的一个粘性解

$$u_- := \lim_{t\to+\infty} T^-_t \varphi.$$

由于 $T^-_t \varphi \geq \varphi$，有 $u_- \geq 0$.

我们把证明分为如下几步：

- 在第 1 步，我们讨论由 $H(x,u,p)$ 生成的接触 Hamilton 流 Φ_t^H 的动力学行为，这里流限制在一个二维的等能量面 M^0 之上。

  - 在第 1.1 步，我们证明 Φ_t^H 的非游荡点只有四个不动点；

  - 在第 1.2 步，我们通过线性化将这些不动点进行分类；

  - 在第 1.3 步，我们证明对于 (4.17) 的任意粘性解 v_-，满足 $\gamma(0)$ 不等于 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 的 $(v_-,L,0)$-校准曲线 $\gamma:(-\infty,0]\to\mathbb{S}^1$ 的 α-极限集只能是 0 或者 π. 我们只考虑定义在 $\mathbb{S}^1$ 上的投影 α-极限集。具体而言，令 $\gamma:(-\infty,0]\to\mathbb{S}^1$ 是 $(v_-,L,0)$-校准曲线，我们定义 $x\in\mathbb{S}^1$ 属于 γ 的 α-极限集 $\alpha(\gamma)$，如果存在序列 $t_n\to-\infty$ 使得 $|\gamma(t_n)-x|\to 0$. 此外，我们可以验证常数曲线 $\gamma(t)\equiv 0,\pi$ 是校准的，从而 $v_-(0)=v_-(\pi)=0$, $v_-'(0)=v_-'(\pi)=0$.

- 在第 2 步，我们证明 (4.17) 粘性解的唯一性。

  - 在第 2.1 步，我们证明 v_- 在 0 和 π 附近是唯一的；

  - 在第 2.2 步，我们通过沿着校准曲线的比较，利用 Gronwall 不等式证明 v_- 在 $[\pi,2\pi)$ 上是唯一的。v_- 在 $[0,\pi]$ 上的唯一性则由 Dirichlet 边值问题的比较原理保证。

Step 1. 接触 Hamilton 流的动力学.

对每个 (4.17) 的粘性解 v_-，令 $\gamma:(-\infty,0]\to\mathbb{S}^1$ 是一条 $(v_-,L,0)$-校准曲线。类似于 [2] Section 3.2 的分析，导数 $v_-'(\gamma(t))$ 每个对 $t\in(-\infty,0)$ 都存在，并且轨道 $(\gamma(t),v_-(\gamma(t)),v_-'(\gamma(t)))$ 满足由 (4.18) 定义的 $H(x,u,p)$ 生成的接触 Hamilton 方程。那么方程 (4.17) 粘性解的唯一性与 $H(x,u,p)$ 生成的接触 Hamilton 流 Φ_t^H 有关。

既然 $c_0=0$ 并且 $H(\gamma(t),v_-(\gamma(t)),v_-'(\gamma(t)))=0$ 对所有 $t\in(-\infty,0)$ 成立，我们在如下的二维等能量面上讨论相应的相流

$$M^0:=\{(x,u,p)\in T^*\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}:\ H(x,u,p)=0\}.$$

注意到沿着接触 Hamilton 流，有 $dH/dt=-H\partial H/\partial u$，并且在等能量面 M^0 上等于零。因此 M^0 是流 Φ_t^H 的不变集。由于我们需要考虑轨道 $(\gamma(t),v_-(\gamma(t)),v_-'(\gamma(t)))$，我们接下来只考虑将 Φ_t^H 限制在不变集 M^0 上。接触 Hamilton 方程退化为

$$\begin{cases}\dot{x}=p,\\ \dot{p}=-(\cos x\cdot u-2\sin 2x)-\sin x\cdot p,\\ \dot{u}=p^2.\end{cases}\tag{4.19}$$

Step 1.1. 非游荡点集. 我们首先考虑 $\Phi_t^H|_{M^0}$ 的非游荡点集 Ω. 假设轨道 $(x(t),u(t),p(t))$ 属于 Ω. 由于 $\dot{u}=p^2\geq 0$，$u(t)$ 等于一个常数 c_u 并且 $p(t)\equiv 0$. 由 $\dot{x}(t)=p(t)=0$，$x(t)$ 也等于一个常数 c_x. 由 $H(x,u,p)=0$ 和 $p=0$，有

$$\sin x\cdot u+\cos 2x-1=0.$$

由 $p=0$ 和 $\dot{p}=0$ 有

$$\cos x\cdot u-2\sin 2x=0.$$

直接计算可知非游荡点只有下面几个

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (\pi,0,0), \quad P_3 = (\frac{\pi}{2},2,0), \quad P_4 = (\frac{3\pi}{2},-2,0).$$

Step 1.2. 不动点的分类. 现在我们考虑不动点附近 $\Phi_t^H|_{M^0}$ 的动力学行为。在 P_1 和 P_2 附近, (4.19) 的线性化方程为

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = 4x, \quad \dot{u} = 0.$$

因此，不动点 P_1 和 P_2 是 $\Phi_t^H|_{M^0}$ 的双曲不动点。在 P_3 和 P_4 附近，(4.19) 的线性化方程分别为

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -2x - p, \quad \dot{u} = 0$$

以及

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -2x + p, \quad \dot{u} = 0.$$

因此，P_3 是稳定焦点，P_4 是不稳定焦点。

Step 1.3. 校准曲线的 α-极限集. $(v_-, L, 0)$-校准曲线 γ 的 α-极限集包含于 Ω 的投影。如果 γ 本身不是不动点，并且它的 α-极限集是一个焦点，那么存在两个时刻 $t_1 < t_2 < 0$ 满足 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ 以及 $v_-'(\gamma(t_1)) \neq v_-'(\gamma(t_2))$，这是不可能的。换句话说，焦点附近的轨道不能形成一个 1-图像。因此满足 $\gamma(0) \neq \pi/2, 3\pi/2$ 的校准曲线 $\gamma : (-\infty, 0] \to \mathbb{S}^1$ 的 α-极限集要么是 0 要么是 π. 对于常数曲线 $\gamma(t) \equiv x_0$，其中 x_0 等于 0 或者 π，有

$$v_-(x_0) - v_-(x_0) = 0 = \int_0^t L(x_0, v_-(x_0), 0) ds,$$

其中

$$L(x,u,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \sin x \cdot u - \cos 2x + 1$$

是 $H(x,u,p)$ 对应的 Lagrange 函数。那么常数曲线 γ 是 $(v_-, L, 0)$-校准曲线。从而

$$\lim_{t\to-\infty} v_-(\gamma(t)) = v_-(0) = v_-(\pi) = c_u = 0,$$

并且

$$\lim_{t\to-\infty} v_-'(\gamma(t)) = v_-'(0) = v_-'(\pi) = 0.$$

Step 2. 方程 (4.17) 粘性解 v_- 的唯一性.

Step 2.1. 对于 $x \in \mathbb{S}^1 \backslash \{\pi/2, 3\pi/2\}$，令 $\gamma : (-\infty, 0] \to \mathbb{S}^1$ 满足 $\gamma(0) = x$ 并且是 $(v_-, L, 0)$-校准曲线。我们断言存在 $\delta > 0$ 使得对于 $x \in [0,\delta]$，校准曲线 γ 的 α-极限集是 0. 若不然，对于所有 $x \in (0,\pi]$，γ 的 α-极限集是 π. 那么由于 (4.19) 的最后一式，v_- 沿着 γ 是单调递增的，v_- 在 $(0,\pi]$ 上就是单调递减的。由 Step 1.3，$v_-(0) = v_-(\pi) = 0$，因此 $v_- \equiv 0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立，而这是不可能的。利用类似的讨论，我们可以证明存在 $\delta > 0$ 使得对于 $x \in [0,\delta] \cup [2\pi-\delta, 2\pi)$，$\gamma$ 的 α-极限集是 0，对于 $x \in [\pi-\delta, \pi+\delta]$，$\gamma$ 的 α-极限集是 π. 适当缩小 δ，那么对于 $x \in [0,\delta] \cup [2\pi-\delta, 2\pi)$ (resp. $x \in [\pi-\delta, \pi+\delta]$)，1-图像 $(x, v_-(x), v_-'(x))$ 与 P_1 (resp. P_2) 关于流 $\Phi_t^H|_{M^0}$ 的局部不稳定流形重合。因此，v_- 在 $[0,\delta] \cup [2\pi-\delta, 2\pi) \cup [\pi-\delta, \pi+\delta]$ 上唯一。

Step 2.2. 由于对于 $x \in [\delta, \pi-\delta]$ 有 $\sin x \geq \sin\delta > 0$，根据 Dirichlet 边值问题粘性解的唯一性 (见[15] 定理 3.3)，v_- 在 $[0,\pi]$ 上是唯一的. 我们还需要考 $[\pi, 2\pi)$ 上的唯一性。假设有两个粘

性解 u_- 和 v_- 满足在 $x \in (\pi+\delta, 3\pi/2)$ 处 $u_-(x) > v_-(x)$. 令 γ 是满足 $\gamma(0)=x$ 的 $(v_-, L, 0)$-校准曲线。不失一般性，我们假设 γ 的 α-极限集是 π. 取 $t_0 < 0$ 使得 $\gamma(t_0) = \pi + \delta$，并且定义

$$G(s) := u_-(\gamma(s)) - v_-(\gamma(s)), \quad s \in [t_0, 0].$$

那么 $G(t_0) = 0$ 并且 $G(0) > 0$. 由连续性，存在 $\sigma_0 \in [t_0, 0)$ 使得 $G(\sigma_0) = 0$ 并且 $G(\sigma) > 0$ 对所有 $\sigma \in (\sigma_0, 0]$ 成立。由定义有

$$u_-(\gamma(\sigma)) - u_-(\gamma(\sigma_0)) \le \int_{\sigma_0}^{\sigma} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), u_-(\gamma(s)))ds,$$

并且

$$v_-(\gamma(\sigma)) - v_-(\gamma(\sigma_0)) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), v_-(\gamma(s)))ds,$$

从而

$$G(\sigma) \le \int_{\sigma_0}^{\sigma} G(s)ds.$$

利用 Gronwall 不等式，得到 $G(\sigma) \equiv 0$ 对所有 $\sigma \in (\sigma_0, 0]$ 恒成立，这与 $u_-(x) > v_-(x)$ 矛盾。对于 $x \in (3\pi/2, 2\pi-\delta)$ 讨论是类似的。利用 v_- 在 $3\pi/2$ 的连续性，我们最终证明了粘性解在 $[\pi, 2\pi)$ 上的唯一性。 ∎

4.2 关于未知函数周期依赖的情形

在本节我们假设 Hamilton 函数 $H(x,p,u)$ 关于变量 u 是 1-周期的。此时 Hamilton 函数关于 u 是非单调的。我们依然考虑方程 (1.2) 的粘性解的存在性，以及 (2.1) 粘性解的长期行为。为了说明研究这类方程的动机，我们考虑如下的 Sine-Laplace 方程

$$u'' + \sin u = 0, \quad x \in \mathbb{S}^1. \tag{4.20}$$

这里 $\mathbb{S}^1$ 是单位圆周。Sine-Laplace 方程可以看作是 Sine-Gordon 方程的静态方程，而后者可以追溯到 Frenkel 和 Kontorova 的工作[73]，并且在理论物理中有广泛的应用[74–75]. 此外，Sine-Laplace 方程还与调和映射有关[76]. 将 (4.20) 乘以 u' 再对 x 积分，我们得到

$$\frac{1}{2}(u')^2 - \cos u = c, \quad x \in \mathbb{S}^1, \tag{4.21}$$

其中 c 是积分常数。显然 (4.21) 中的 Hamilton 函数关于 u 是周期的。根据 [77] 命题 3.2，当 $c \in [-1, 1]$ 时 (4.21) 有解。下面的定理 4.4 进一步研究了这类接触型 Hamilton-Jacobi 方程的遍历问题。

4.2.1 主要结论

这里我们依然假设 M 紧致无边的光滑流形。令 $H: T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^3 函数，满足性质 1.6-1.8 以及

性质 4.1 周期性：$H(x,p,u+1) \equiv H(x,p,u)$.

注 4.2 显然如果 $G(x,p)$ 是一个经典的 Tonelli Hamilton 函数，那么 $(x,p,u) \mapsto \sin(2\pi u) + G(x,p)$ 满足性质 1.6-1.8 以及 4.1. 这里要求 Hamilton 函数是 C^3 的是为了得到 Lipscitz 估计，见附录 C.2. 由于定理 4.4 以及定理 4.5 (1) 的证明不依赖于极小作用量函数而只与解半群有关，结合 [36]，Hamilton 函数所满足的条件可以弱化为性质 1.1，1.3，1.4，1.7 以及性质 4.1.

我们的第一个主要结论关于定态方程的遍历问题。考虑

$$H(x, Du(x), u(x)) = c. \tag{4.22}$$

令 $\mathscr{C}$ 是所有使得 (4.22) 有粘性解的常数 c 组成的集合。在性质 1.6-1.8 成立的时候，[59] 证明了 $\mathscr{C}$ 是非空的。之后，[36] 在性质 1.1，1.3，1.4，1.7 成立的假设下证明了这一结论。注意到当 Hamilton 函数关于 p 仅仅是强制性增长的时候，$\mathscr{C}$ 的非空性不能保证。近期，在性质 1.6-1.8 成立的假设下，集合 $\mathscr{C}$ 的结构被 [78] 详细研究了：$\mathscr{C}$ 是一个区间。它可能是一个开区间、一个闭区间或者一个半开半闭区间。此外，[78] 还给出了这个区间的左端点 c_1 (可能是 $-\infty$) 的一个极小-极大公式，以及右端点 c_2 (可能是 ∞) 的一个极大-极小公式。如果进一步性质 4.1 成立，我们可以得到如下结果

定理 4.4 集合 $\mathscr{C}$ 是一个有界闭区间。

注 4.3 这里我们给出性质 1.6-1.8 成立的时候集合 $\mathscr{C}$ 的若干例子：

- 对于经典的 Tonelli Hamilton 函数 $G(x, p)$，存在唯一的实数 c 使得定态方程

$$G(x, Du(x)) = c \tag{4.23}$$

  有粘性解。实数 c 被称为等效 Hamilton 函数[40] 或者 Mañé 临界值[49]. 在这种情况下，集合 $\mathscr{C}$ 是一个单点集。

- 对于打折的 Hamilton-Jacobi 方程，集合 $\mathscr{C}$ 等于 $\mathbb{R}$，见 [47].

- 对于方程 (4.1)，根据定理 4.1 (1)，$\mathscr{C} = [c_0, +\infty)$，这里 c_0 是有限数。

第二个主要结论考虑了演化方程粘性解的长期行为。令 $u^c(x, t)$ 是下面 Cauchy 初值问题的唯一粘性解

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t), u(x,t)) = c, & (x,t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in M. \end{cases} \tag{4.24}$$

定理 4.5 令 $\varphi \in C(M)$ 以及 $c \in \mathscr{C}$，那么

(1) 存在仅依赖于 φ 和 H 的常数 $K_1 > 0$ 使得

$$|u^c(x, t)| \leq K_1, \quad \forall x \in M, \forall t \geq 0.$$

(2) 存在仅依赖于 H 的常数 $K_2 > 0$ 使得

$$\text{ess sup}_{x \in M} |Du^c(x, t)| \leq K_2, \quad \forall t > 1.$$

注 4.4 上面的结果给出了 u^c 的有界性以及关于 x 的 Lipschitz 估计。注意到这里的估计与 c 无关。对于演化方程的长期行为，我们回顾以往的结论：如果 u^c 对所有 $t \geq 0$ 都是有界的，那么极限函数 $\liminf_{t \to +\infty} u^c(x, t)$ 是 (4.22) 的粘性解[59]. 此外，根据定理 3.2，当 H 关于 u 严格单调递增，对所有初值 φ，相应的粘性解 u^c 一致收敛到 (4.22) 的唯一粘性解。

最后，我们考虑当 $c \notin \mathscr{C}$ 时演化方程的长期行为。这个结论的证明用到了解半群和圆周自同胚映射之间的一个有趣联系。这个结论同时说明了 (1.7) 和 (4.24) 之间的区别。

定理 4.6 令 $\varphi \in C(M)$ 以及 $c \notin \mathscr{C}$，那么

(1) 极限 $\lim_{t\to+\infty} u^c(x,t)/t =: \rho(c)$ 存在并且独立于 φ 和 x.

(2) 函数 $(x,t) \mapsto |u^c(x,t) - \rho(c)t|$ 在 $M \times [1,+\infty)$ 上有界，界仅依赖于 c 和 φ.

(3) 函数 $c \mapsto \rho(c)$ 单调非减，并且是局部模连续的。具体而言，对于任意连通紧区间 $I \subset \mathbb{R}\backslash\mathscr{C}$，以及 $[c'',c'] \subset I$ 满足 $c'' < c'$，有

$$0 \le \rho(c') - \rho(c'') \le \omega(c' - c'').$$

这里 ω 是定义在 I 上的单调非减实数值函数，满足 $\lim_{r\to0+} \omega(r) = 0$.

注 4.5 函数 $\rho : \mathbb{R}\backslash\mathscr{C} \to \mathbb{R}$ 可以被延拓到整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上。延拓后的函数依然是单调非减局部模连续的。当 $c \in \mathscr{C}$，根据定理 4.5 (1)，$\rho(c) \equiv 0$.

4.2.2 集合 $\mathscr{C}$ 端点的刻画

对于实数 c，我们记 T_t^c 和 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 分别为 $L + c$ 对应的解半群和隐式作用量函数，见第 1.4 节，这里 L 是 H 对应的 Lagrange 函数。

引理 4.8 对任意 $c \in \mathbb{R}$，$n \in \mathbb{Z}$ 以及 $\varphi \in C(M)$,

$$T_t^c(\varphi + n)(x) = T_t^c\varphi(x) + n, \quad \forall (x,t) \in M \times [0,+\infty).$$

证明 由定义

$$T_t^c\varphi(x) + n = \inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0)) + n + \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T_\tau^c\varphi(\gamma(\tau)))\mathrm{d}\tau + ct\right\},$$

其中极小在满足 $\gamma(t) = x$ 的 Lipschitz 连续曲线 $\gamma : [0,t] \to M$ 中取。由于 Hamilton 函数满足性质 4.1，容易证明相应的 Lagrange 函数关于 u 也是 1-周期的。由定理 1.19，有

$$\begin{aligned} T_t^c\varphi(x) + n &= \inf_{\gamma(t)=x}\left\{\varphi(\gamma(0)) + n + \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T_\tau^c\varphi(\gamma(\tau)) + n)\mathrm{d}\tau + ct\right\} \\ &= T_t^c(\varphi + n)(x). \end{aligned}$$

∎

对任意给定的 $\varphi \in C(M)$，根据 [59] 引理 5.2，定义

$$\begin{aligned} c_1 &:= \sup\{c \mid \inf_{(x,t)\in M\times[0,+\infty)} T_t^c\varphi(x) = -\infty\}, \\ c_2 &:= \inf\{c \mid \sup_{(x,t)\in M\times[0,+\infty)} T_t^c\varphi(x) = +\infty\}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

并且有 $-\infty \le c_1 < +\infty, -\infty < c_2 \le +\infty$，$c_1 \le c_2$.

引理 4.9 令 $\varphi \in C(M)$. 上面定义的 c_1 和 c_2 是有限数。如果 c 属于有界区间 (c_1,c_2)，函数 $(x,t) \mapsto T_t^c\varphi(x)$ 在 $M \times [0,+\infty)$ 上是有界的。

证明 我们先证明第一个陈述。如果我们可以找到一个有限数 c' 使得

$$\sup_{M\times[0,+\infty)} T_t^{c'}\varphi(x) = +\infty, \tag{4.26}$$

那么根据 c_2 的定义，这说明 $c_2 \in \mathbb{R}$. 如果 $c_1 = -\infty$，我们取 c'' 为一个任意的实数；如果 $c_1 \in \mathbb{R}$，我们取 $c'' = c_1 + 1$. 那么根据 c_1 的定义，有 $\inf_{M\times[0,+\infty)} T_t^{c''}\varphi(x) > -\infty$.

令 $c' = \lambda + c'' + 1$. 令 γ : $[0,t] \to M$ 是 $T_t^{c'}\varphi(x)$ 的极小曲线，满足 $\gamma(t) = x$. 那么

$$\begin{aligned}
T_t^{c'}\varphi(x) - T_t^{c''}\varphi(x) \geq \varphi(\gamma(0)) &+ \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T_\tau^{c'}\varphi(\gamma(\tau)))d\tau + c't \\
&- \varphi(\gamma(0)) - \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T_\tau^{c''}\varphi(\gamma(\tau)))d\tau - c''t \\
&\geq -\lambda\int_0^t |T_t^{c'}\varphi(\gamma(\tau)) - T_t^{c''}\varphi(\gamma(\tau))|(\mathrm{mod}\ 1)d\tau + (c'-c'')t \\
&\geq t,
\end{aligned}$$

这说明 (4.26) 成立。因此 $c_2 \in \mathbb{R}$. 利用类似的讨论，可以证明 $c_1 \in \mathbb{R}$.

第二个陈述是 c_1 和 c_2 的定义，以及第一个陈述的直接推论。 ∎

引理 4.10 上面定义的实数 c_1 和 c_2 仅依赖于 H.

证明 我们需要说明 c_1 和 c_2 与初值 φ 无关。给定 $\varphi_0 \in C(M)$，令 c_1 和 c_2 由 (4.25) 给出，其中 $\varphi = \varphi_0$. 对任意的 $\phi \in C(M)$，存在整数 n_1 和 n_2 使得

$$\varphi_0 + n_1 \leq \phi \leq \varphi_0 + n_2.$$

根据引理 1.12 和 4.8，有

$$T_t^c\varphi_0 + n_1 \leq T_t^c\phi \leq T_t^c\varphi_0 + n_2, \quad \forall c \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0. \tag{4.27}$$

如果 $c > c_2$，那么 $\sup_{M\times[0,+\infty)} T_t^c\varphi_0(x) + n_1 = +\infty$. 根据 (4.27) 的第一个不等号有

$$\sup_{M\times[0,+\infty)} T_t^c\phi(x) = +\infty.$$

如果 $c < c_2$，那么 $\sup_{M\times[0,+\infty)} T_t^c\varphi_0(x)+n_2 < +\infty$. 根据 (4.27) 的第二个不等号有 $\sup_{M\times[0,+\infty)} T_t^c\phi(x) < +\infty$. 从而

$$c_2 = \inf\{c \mid \sup_{(x,t)\in M\times[0,+\infty)} T_t^c\phi(x) = +\infty\},$$

这说明 c_2 与 ϕ 无关. 关于 c_1 的讨论是类似的。 ∎

4.2.3 定理 4.4 的证明

对于 $c \notin [c_1, c_2]$，由于 u 是方程

$$H(x, Du, u) = c \tag{4.28}$$

的粘性解当且仅当 u 是 $\{T_t^c\}_{t\geq 0}$ 的一个不动点，那么根据 c_1 和 c_2 的定义，方程 (4.28) 无解。

对于 $c \in (c_1, c_2)$，根据 [59] 定理 1.2 的证明 Step 2，$\{T_t^c \varphi(x)\}_{t\geq 1}$ 在 M 上是一致有界等度 Lipschitz 的，并且

$$\varphi_\infty^c(x) := \liminf_{t\to+\infty} \varphi_\infty^c(x)$$

是 (4.28) 的解。注意到 H 关于 u 是 1-周期的，并且是超线性增长的。由引理 4.10，c_1, c_2 仅依赖于 H. 因此 $\operatorname{ess\,sup}_M |D\varphi_\infty^c(x)|$ 的界无关于 c. 固定 $x_0 \in M$，定义

$$\tilde{\varphi}_\infty^c(x) := \varphi_\infty^c(x) - [\varphi_\infty^c(x_0)].$$

那么 $\tilde{\varphi}_\infty^c$ 依然是 (4.28) 的解。既然 $\operatorname{ess\,sup}_M |D\tilde{\varphi}_\infty^c(x)|$ 的界无关于 c 并且 $c \in (c_1, c_2)$，那么 $\tilde{\varphi}_\infty^c$ 的界无关于 c. 由 Arzelá-Ascoli 定理，存在一列 $\{c_n\} \subset (c_1, c_2)$ 以及 $\tilde{\varphi}_\infty^{c_n}(x) \in C(M)$ 满足 $c_2 = \lim_{n\to+\infty} c_n$ 并且一致极限

$$u^*(x) := \lim_{n\to+\infty} \tilde{\varphi}_\infty^{c_n}(x)$$

存在。根据粘性解的稳定性，u^* 是 $H(x, Du, u) = c_2$ 的粘性解。利用类似的讨论我们可以知道 $H(x, Du, u) = c_1$ 也有粘性解。

4.2.4 定理 4.5 的证明.

(1) 令 u_i 是下面方程的粘性解。

$$H(x, Du, u) = c_i, \quad i = 1, 2.$$

对任意 $\varphi \in C(M)$，存在依赖于 φ 的正整数 N_i^φ 使得

$$u_i - N_i^\varphi \leq \varphi \leq u_i + N_i^\varphi.$$

注意到 u_i 是 $T_t^{c_i}$ 的不动点。在上面不等式两边作用 $T_t^{c_i}$，结合引理 4.8，有

$$u_i - N_i^\varphi \leq T_t^{c_i}\varphi \leq u_i + N_i^\varphi, \quad \forall t > 0.$$

现在对于 $c \in [c_1, c_2]$，我们需要说明 $T_t^c \varphi$ 对于所有 $t > 0$ 是有界的，并且界一致于 c. 根据引理 1.10，容易证明当 $c' < c''$，有 $T_t^{c'}\varphi \leq T_t^{c''}\varphi$ (见[59] 引理 5.2 的证明). 因此，对于任意 $c \in [c_1, c_2]$，有

$$T_t^{c_1}\varphi \leq T_t^c \varphi \leq T_t^{c_2}\varphi, \quad \forall t > 0.$$

而我们已经证明了 $T_t^{c_i}\varphi$ 对于所有 $t > 0$ 是有界的，因此定理的第一个陈述的证明完毕。

(2) 类似于引理 4.8，可以证明 $h_{x_0,u_0+1}^c(x, 1) = 1 + h_{x_0,u_0}^c(x, 1)$. 那么对于 $c \in [c_1, c_2]$，有

$$\begin{aligned} |T_t^c\varphi(x) - T_t^c\varphi(y)| &\leq \sup_{z\in M} |h^c_{z, T_{t-1}^c\varphi(z) (\mathrm{mod}\ 1)}(x, 1) - h^c_{z, T_{t-1}^c\varphi(z) (\mathrm{mod}\ 1)}(y, 1)| \\ &\leq l_1 d(x, y), \ \forall t > 1, \end{aligned}$$

其中根据引理 C.5，Lipschitz 常数 l_1 与 c 无关。证明结束。

4.2.5 定理 4.6 的证明.

我们在这里只在 $c>c_2$ 的假设下证明定理 4.6，对于 $c<c_1$，利用类似的讨论即可。
(1) 由于 $1+h_{x_0,u_0}(x,1)=h_{x_0,u_0+1}(x,1)$，利用定理 1.9 有

$$\begin{aligned}|T_t^c\varphi(x)-T_t^c\varphi(y)|&\leq\sup_{z\in M}|h^c_{z,T^c_{t-1}\varphi(z)}(x,1)-h^c_{z,T^c_{t-1}\varphi(z)}(y,1)|\\&=\sup_{z\in M}|h^c_{z,T^c_{t-1}\varphi(z)(\mathrm{mod}\ 1)}(x,1)-h^c_{z,T^c_{t-1}\varphi(z)(\mathrm{mod}\ 1)}(y,1)|\\&\leq l_1^c d(x,y),\quad\forall t\geq 1,\end{aligned}\tag{4.29}$$

其中 l_1^c 是 $x\mapsto h^c_{x_0,u_0}(x,1)$ 的 Lipschitz 常数，并且依赖于 c. 对于 $c>c_2$，函数族 $\{T_t^c\varphi(x)\}_{t\geq 1}$ 是等度 Lipschitz 连续的。

我们记 $\mathrm{Lip}(l_1^c)\subset C(M)$ 为 Lipschitz 连续函数组成的集合，其 Lipschitz 常数为 l_1^c. 由 (4.29)，T_1^c 是 $\mathrm{Lip}(l_1^c)$ 到自身的算子。对任意的 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{Lip}(l_1^c)$，由定理 1.19，存在 $z_2\in M$ 使得

$$T_1^c\varphi_1(x)-T_1^c\varphi_2(x)\leq h^c_{z_2,\varphi_1(z_2)}(x,1)-h^c_{z_2,\varphi_2(z_2)}(x,1)\leq l^c_{u_0}\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty,$$

其中 $l^c_{u_0}$ 是函数 $u_0\mapsto h^c_{x_0,u_0}(x,1)$ 在 $[-A,A]$ 上的 Lipschitz 常数，这里 $A:=\max\{\|\varphi_1\|_\infty,\|\varphi_2\|_\infty\}$. 交换 φ_1 和 φ_2，映射 $\varphi\mapsto T_1^c\varphi$ 是连续的。因此，对于 $m\in\mathbb{N}$ 和 $x\in M$，我们可以定义

$$\alpha_m(x)=\inf_{\varphi\in\mathrm{Lip}(l_1^c)}(T_m^c\varphi(x)-\varphi(x)),\quad \beta_m(x)=\sup_{\varphi\in\mathrm{Lip}(l_1^c)}(T_m^c\varphi(x)-\varphi(x)).$$

我们需要说明 $\alpha_m(x)$ 和 $\beta_m(x)$ 是良定义的。事实上，由于 T_1^c-id 有 $\mathbb{Z}$-平移不变性，我们取 $\varphi\in\mathrm{Lip}(l_1^c)$ 满足 $\varphi(x_0)\in[0,1)$，这里 $x_0\in M$ 是任意取定的一点。那么 $\|\varphi\|_\infty\leq 1+l_1^c\mathrm{diam}(M)$. 我们记这样的函数组成的集合为 $\mathscr{B}^c_{x_0}$. 这个集合是一致有界等度 Lipschitz 连续的。因此 $\mathscr{B}^c_{x_0}$ 是 $C(M)$ 的紧子集。

固定 $x_0\in M$，对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{B}^c_{x_0}$，我们可以假设 $\varphi_1(x_0)\leq\varphi_2(x_0)<\varphi_1(x_0)+1$. 那么

$$\varphi_1(x)-2l_1^c\mathrm{diam}(M)\leq\varphi_2(x)\leq\varphi_1(x)+1+2l_1^c\mathrm{diam}(M),\quad\forall x\in M.$$

我们取 $N^c\in\mathbb{Z}$ 足够大 (比如取 $N^c=[2l_1^c\mathrm{diam}(M)]+1$) 使得

$$\varphi_1-N^c\leq\varphi_2\leq\varphi_1+1+N^c.$$

注意到 N^c 仅与 c 有关。对任意 $m\in\mathbb{N}$，有

$$T_m^c\varphi_1-N^c\leq T_m^c\varphi_2\leq T_m^c\varphi_1+1+N^c.$$

那么

$$T_m^c\varphi_1-N^c-(\varphi_1+1+N^c)\leq T_m^c\varphi_2-\varphi_2\leq T_m^c\varphi_1+1+N^c-(\varphi_1-N^c),$$

从而

$$(T_m^c\varphi_1-\varphi_1)-(2N^c+1)\leq T_m^c\varphi_2-\varphi_2\leq(T_m^c\varphi_1-\varphi_1)+(2N^c+1).$$

因此有

$$\beta_m(x)-\alpha_m(x)\leq 4N^c+2,\quad\forall x\in M.$$

对于 $n\in\mathbb{N}, n\geq m$，有 $n=qm+r$，其中 $0\leq r<m$. 由定义，对任意 $\varphi\in\mathrm{Lip}(l_1^c)$，有

$$\alpha_m(x)\leq T_m^c\varphi(x)-\varphi(x)\leq\beta_m(x),\quad\forall x\in M.$$

对于 $p=1,2,\cdots,q$，有

$$\alpha_m(x)\leq T_{pm}^c\varphi(x)-T_{(p-1)m}^c\varphi(x)\leq\beta_m(x),\quad\forall x\in M.$$

我们关于 p 从 1 到 q 求和，得到

$$q\alpha_m(x)\leq T_{qm}^c\varphi(x)-\varphi(x)\leq q\beta_m(x),\quad\forall x\in M. \tag{4.30}$$

由 (5.14) 有

$$q\alpha_m(x)\leq T_{qm+r}^c\varphi(x)-T_r^c\varphi(x)\leq q\beta_m(x),\quad\forall x\in M.$$

在 (5.14) 中取 $m=1$ 以及 $q=r$，有

$$r\alpha_1(x)\leq T_r^c\varphi(x)-\varphi(x)\leq r\beta_1(x),\quad\forall x\in M.$$

将上面两式相加，再除以 $n=qm+r$，得到

$$\frac{q\alpha_m(x)+r\alpha_1(x)}{n}\leq\frac{T_n^c\varphi(x)-\varphi(x)}{n}\leq\frac{q\beta_m(x)+r\beta_1(x)}{n},\quad\forall x\in M.$$

注意到 $\beta_m(x)-\alpha_m(x)\leq 4N^c+2$，这个界是独立于 m 的。令 $m\to+\infty$，可以得到极限 $\lim_{n\to+\infty}T_n^c\varphi(x)/n$ 存在。接下来我们需要说明这个极限仅依赖于 c.

固定 $\varphi_0\in\mathrm{Lip}(l_1^c)$. 对任意 $\varphi\in C(M,\mathbb{R})$，存在 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi_0(x)+n_1\leq\varphi(x)\leq\varphi_0(x)+n_2,\quad\forall x\in M.$$

利用引理 1.12，有

$$T_t^c(\varphi_0+n_1)(x)\leq T_t^c\varphi(x)\leq T_t^c(\varphi_0+n_2)(x),\quad\forall x\in M.$$

由引理 4.8，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^c\varphi_0(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^c\varphi(x)}{n},\quad\forall x\in M.$$

因此 $\lim_{n\to+\infty}T_n^c\varphi(x)/n$ 不依赖于 φ.

由 Lipschitz 连续性，对于任意的 $x,y\in M$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^c\varphi_0(x)-l_1^c\mathrm{diam}(M)}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^c\varphi_0(y)}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{T_n^c\varphi_0(x)+l_1^c\mathrm{diam}(M)}{n}.$$

因此，极限 $\lim_{n\to+\infty}T_n^c\varphi(x)/n$ 无关于 x.

记 $t=[t]+\{t\}$，其中整数部分为 $[t]=n$. 注意到 $\lim_{n\to+\infty}T_n^c\varphi(x)/n$ 独立于初值函数，有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{T_t^c\varphi(x)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{T_{[t]}^c\circ T_{\{t\}}^c\varphi(x)}{[t]}\frac{[t]}{t}=\lim_{n\to+\infty}\frac{T_n^c\varphi(x)}{n}.$$

我们记 $\rho(c)$ 为极限 $\lim_{t\to+\infty}\frac{T_t^c\varphi(x)}{t}$，这个量仅依赖于 c.

(2) 对于 $\varphi_0 \in \mathrm{Lip}(l_1^c)$，有

$$n\rho(c) = \lim_{m\to+\infty} \frac{T_{nm}^c\varphi_0(z) - \varphi_0(z)}{m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(T_n^c - id)(T_{in}^c\varphi_0(z)), \quad \forall z \in M.$$

那么

$$\begin{aligned} |T_n^c\varphi_0(x) - (\varphi_0(x) + n\rho(c))| &= \left|(T_n^c - id)\varphi_0(x) - \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(T_n^c - id)T_{in}^c\varphi_0(x)\right| \\ &\le \beta_n(x) - \alpha_n(x) \le 4N^c + 2, \quad \forall n \ge 1. \end{aligned} \tag{4.31}$$

因此 $|T_t^c\varphi_0(x) - \rho(c)t|$ 在 $M\times[1,+\infty)$ 上有仅依赖于 c 和 φ_0 的界。对于 $\varphi \in C(M)$，由于 M 是紧的，容易证明 $|T_t^c\varphi(x) - \rho(c)t|$ 在 $M\times[1,+\infty)$ 有仅依赖于 c 和 φ 的界。

(3) 现在我们考察 $\rho(c)$ 的性质。由引理 1.10，可以知道 $c \mapsto \rho(c)$ 是非减的。对于 $c', c'' > c_2$ 以及 $c' > c''$，任意的 $x \in M$，由引理 1.11，有

$$0 < T_n^{c'}\varphi(x) - T_n^{c''}\varphi(x) \le ne^{\lambda n}\left(c' - c''\right), \quad \forall\varphi \in \mathrm{Lip}\left(l_1^c\right), \forall x \in M.$$

由 $\alpha_m(x)$ 和 $\beta_m(x)$ 的定义，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\alpha_n(x) \le T_n^{c'}\varphi(x) - \varphi(x) \le \beta_n(x).$$

因此

$$\alpha_n(x) - ne^{\lambda n}\left(c' - c''\right) \le T_n^{c''}\varphi(x) - \varphi(x) \le \beta_n(x).$$

对任意 $k \in \mathbb{N}_+$，有

$$T_{kn}^c\varphi(x) - \varphi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} T_n^c \circ T_{jn}^c\varphi(x) - T_{jn}^c\varphi(x),$$

其中 $T_{jn}^c\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\left(l_1^c\right)$ 对每个 j 都成立。从而

$$k\alpha_n(x) - kne^{\lambda n}\left(c' - c''\right) \le T_{kn}^{c^*}\varphi(x) - \varphi(x) \le k\beta_n(x), \quad \forall\varphi \in \mathrm{Lip}\left(l_1^c\right),$$

这个式子对于 $c^* = c'$ 或者 $c^* = c''$ 都是成立的。我们已经证明了下面极限存在

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T_t^c\varphi(x)}{t}$$

因此

$$\rho(c) = \lim_{k\to+\infty}\frac{T_{kn}^c\varphi(x)}{kn}.$$

那么

$$\frac{\alpha_n(x) - ne^{\lambda n}\left(c' - c''\right)}{n} \le \rho\left(c^*\right) \le \frac{\beta_n(x)}{n}.$$

从而我们得到

$$0 \le \rho\left(c'\right) - \rho\left(c''\right) \le \frac{4N^{c'} + 2 + ne^{\lambda n}\left(c' - c''\right)}{n}.$$

如果 c', c'' 属于一个紧区间 $I \subset (c_2, +\infty)$，由推论 C.2，$N^{c'}$ 小于一个仅依赖于 I 的常数 N_I. 定义 $N := [\frac{c'-c''}{e^{-\lambda}}]$，那么方程 $te^{\lambda t}(c' - c'' - Ne^{-\lambda}) = 1$ 的根不小于 1. 这个根可以表示为 $t = \frac{1}{\lambda}W(\frac{\lambda}{c'-c''-Ne^{-\lambda}})$，其中 W 是 xe^x 的反函数。由于 n 是任意的，取 $n = [t]$，那么

$$\rho(c') - \rho(c'' + Ne^{-\lambda}) \leq \frac{4N^{c'} + 3}{[\frac{1}{\lambda}W(\frac{\lambda}{c'-c''-Ne^{-\lambda}})]}.$$

从而

$$\begin{aligned}\rho(c') - \rho(c'') =& \rho(c') - \rho(c'' + Ne^{-\lambda}) + \sum_{k=1}^{N}\big(\rho(c'' + ke^{-\lambda}) - \rho(c'' + (k-1)e^{-\lambda})\big)\\ \leq& \frac{4N_I + 3}{[\frac{1}{\lambda}W(\frac{\lambda}{c'-c''-Ne^{-\lambda}})]} + N(4N_I + 3).\end{aligned}$$

所以 $\rho(c)$ 是模连续的，模为

$$\omega(r) := (4N_I + 3)\left[\frac{1}{[\frac{1}{\lambda}W(\frac{\lambda}{r-[\frac{r}{e^{-\lambda}}]e^{-\lambda}})]} + [\frac{r}{e^{-\lambda}}]\right].$$

容易看到，$\omega(r)$ 是非减的，并且满足 $\lim_{r\to 0+}\omega(r) = 0$. 证明结束。

4.3 本章小结

本章是本文的核心部分。我们考虑了关于未知函数非单调依赖的 Hamilton-Jacobi 方程，这类方程在经典的 Hamilton-Jacobi 方程粘性解理论中很少被研究。我们主要利用了第 2 章引入的隐式半群方法，考虑了定态方程粘性解的存在性，以及演化方程 Cauchy 初值问题粘性解的长期行为。此时粘性解理论中的比较定理不成立，因此定态方程粘性解集合的结构，以及演化方程 Cauchy 问题粘性解的长期行为是复杂的。隐式半群突破了粘性解理论中的比较定理，从而在这类非单调的非线性方程中发挥了重要作用。与比较定理不同，半群方法是沿着极小曲线进行比较的。

在本章我们考虑了两类非单调的模型，它们的 Hamilton 函数分别为:

- $H(x, p) + \lambda(x)u$，其中 $\lambda(x)$ 是变号的；
- $H(x, p, u)$，其中 $H(x, p, u)$ 关于 u 是 1-周期的。

特别地，考虑定态方程

$$H(x, Du(x), u(x)) = c, \quad x \in M.$$

对于第一类模型，存在常数 $c_0 \in \mathbb{R}$ 使得上述方程有粘性解当且仅当 $c \in [c_0, +\infty)$. 对于第二类模型，存在常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 使得上述方程有粘性解当且仅当 $c \in [c_1, c_2]$. 对比定理 1.3，这些结果揭示了经典的 Hamilton-Jacobi 方程和接触型 Hamilton-Jacobi 方程之间的本质区别。

第 5 章　在方程组中的应用

在本章，我们将第 3 章关于单调情形 Hamilton-Jacobi 方程的有关结论应用在耦合的非线性偏微分方程组上。我们主要考虑两类对象，第一类是弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组，它是两个 Hamilton-Jacobi 方程相互耦合的方程组，其中导数项不参与耦合；第二类是平均场博弈模型，它是一个 Hamilton-Jacobi 方程耦合上一个连续性方程。

5.1　弱耦合方程组

在本节，我们考虑弱耦合 Hamilton-Jacobi 方程组粘性解的存在性。我们定义了一个重要的量 χ，它衡量了方程组耦合的强度。我们给出了下面方程组粘性解的一个存在性定理。

$$H_i(x, Du_i(x), u_i(x), u_j(x)) = 0, \quad i \neq j \in \{1, 2\}$$

这里经典的单调性条件不成立，并且耦合是弱的 ($\chi < 1$). 每个 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 可以是关于 u_i 单调增或者减的。对于线性耦合的情形，我们用打折项消失方法研究了临界情形 $\chi = 1$.

5.1.1　主要结论

在下面，我们令 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 并且记 u_i 是它的 i-分量。对于 $i \in \{1, \dots, m\}$，令 $H_i : T^*M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是连续函数。我们考虑下面方程组的粘性解

$$H_i(x, Du_i, \mathbf{u}) = 0, \quad x \in M,\ 1 \leq i \leq m \tag{5.1}$$

这类方程组称为是弱耦合的，是因为第 i 个方程仅依赖于 Du_i，但是不依赖于 $Du_j, j \neq i$. 关于方程组 (5.1) 的研究起源于随机切换的最优控制问题[79–80].

定义 5.1 连续函数 $\mathbf{u} : M \to \mathbb{R}^m$ 被称为 (5.1) 的粘性下解 (resp. 粘性上解)，如果对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$ 以及 C^1 的试验函数 ϕ，当 $u_i - \phi$ 在 x 取到局部极大值 (resp. 极小值)，那么

$$H_i(x, D\phi(x), \mathbf{u}(x)) \leq 0, \quad (\text{resp. } H_i(x, D\phi(x), \mathbf{u}(x)) \geq 0).$$

一个函数被称为 (5.1) 的粘性解，如果它同时是粘性上解和粘性下解。

对于方程组 (5.1)，经典的假设是单调性条件，它要求 H_i 关于 u_i 单调递增，并且对 u_j ($j \neq i$) 单调非增。具体来说，对任意的 $(x, p) \in T^*M$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$，如果 $u_k - v_k = \max_{1 \leq i \leq m}(u_i - v_i) \geq 0$，那么 $H_k(x, p, \mathbf{u}) \geq H_k(x, p, \mathbf{v})$. 当耦合是线性的，即 H_i 具有形式

$$H_i(x, p, \mathbf{u}) = h_i(x, p) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(x) u_j,$$

单调性条件成立当且仅当

$$\lambda_{ij}(x) \le 0 \text{ if } i \ne j \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(x) \ge 0 \text{ for all } i \in \{1, \dots, m\}. \tag{5.2}$$

根据 [81] 命题 1.2，如果耦合矩阵 $(\lambda_{ij}(x))$ 不可约化，那么 $\lambda_{ii}(x) > 0$ 对所有 $i \in \{1, \dots, m\}$ 成立。关于弱耦合方程组，有如下被关注的研究对象：

- 定态的弱耦合方程组。关于粘性解的存在性以及比较定理，参见 [82–83]. 关于弱 KAM 理论，参见 [81]. 关于打折项消失方法，参见 [84–85].
- 演化的弱耦合方程组。其粘性解的表示公式在确定的框架下由 [86] 给出，在随机的框架下由 [87] 给出。对于长期行为，参见 [88–89]. 对于均匀化理论，参见 [90].

本节给出的结论和前人已有结论的区别在于：

- 定理 5.1 克服了上面所述的单调性条件不成立的情形。对于 $i \in \{1, 2\}$，Hamilton 函数 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 u_i 可以是单调增的也可以是单调减的。此外，$H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 u_j 是非单调的。
- 在定理 5.2 的证明中，我们处理了和以往打折项消失不同的情形。打折项仅出现在第二个方程，见 (5.6). 定理 5.2 在只有两个方程的时候推广了 [81] 定理 2.12.

非线性耦合

考虑如下的弱耦合 Hamilton-Jacobi 方程组

$$H_i(x, Du_i(x), u_i(x), u_j(x)) = 0, \quad x \in M,\ i \ne j \in \{1, 2\}. \tag{5.3}$$

对于 $i \in \{1, 2\}$，假设 $H_i : T^*M \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足

性质 5.1 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 是连续的。

性质 5.2 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 p 是超线性增长的，即存在一个函数 $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty, \quad \text{and} \quad H_i(x, p, 0, 0) \ge \theta(|p|_x) \quad \text{for every } (x, p) \in T^*M.$$

性质 5.3 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 p 是凸的。

性质 5.4 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 u_i 和 u_j 一致 Lipschitz 连续，即存在 $\Theta > 0$ 使得

$$|H_i(x, p, u_i, u_j) - H_i(x, p, v_i, v_j)| \le \Theta \max\{|u_i - v_i|, |u_j - v_j|\}.$$

性质 5.5 存在 $\lambda_{ii} > 0$ 使得对于所有 $(x, p, v) \in T^*M \times \mathbb{R}$ 有

$$H_i(x, p, u_i, v) - H_i(x, p, v_i, v) \ge \lambda_{ii}(u_i - v_i), \quad \forall u_i \ge v_i.$$

性质 5.6 存在 $\lambda_{ii} > 0$ 使得对于所有 $(x, p, v) \in T^*M \times \mathbb{R}$ 有

$$H_i(x, p, u_i, v) - H_i(x, p, v_i, v) \le -\lambda_{ii}(u_i - v_i), \quad \forall u_i \ge v_i.$$

性质 5.7 存在常数 $\lambda_i > 0$ 使得对于所有 $(x, v) \in M \times \mathbb{R}$ 以及所有 $u_i \ne v_i, u_j \ne v_j \in \mathbb{R}$，有

$$\left| \frac{H_i(x, 0, 0, u_j) - H_i(x, 0, 0, v_j)}{u_j - v_j} \cdot \frac{u_i - v_i}{H_i(x, 0, u_i, v) - H_i(x, 0, v_i, v)} \right| \le \lambda_i.$$

注 5.1 令 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 满足性质 5.5 或者性质 5.6. 如果存在 $\lambda_{ij} > 0$ 使得对于所有 $(x, p, u) \in T^*M \times \mathbb{R}$ 有

$$|H_i(x, p, u, u_j) - H_i(x, p, u, v_j)| \le \lambda_{ij}|u_j - v_j|, \quad \forall u_j, v_j \in \mathbb{R},$$

那么 λ_i 可以取为 $\lambda_{ij}/\lambda_{ii}$. 定义

$$\chi := \lambda_1\lambda_2.$$

当 χ 很小，耦合可以认为是很弱的。对于线性耦合情形 (5.5)，我们令

$$\lambda_i := \max_{x\in M} \left| \frac{\lambda_{ij}(x)}{\lambda_{ii}(x)} \right|.$$

在下面，我们记 **(I)** 为性质 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7，记 **(D)** 为性质 5.1-5.4, 5.6, 5.7. 注意到这里当 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 u_i 单调递增，凸性假设即性质 5.3 是不需要的。

定理 5.1 如果 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 满足条件 (I) 或者 (D)，并且 $\chi < 1$，那么方程组 (5.3) 有粘性解。

注 5.2 我们对上面结果做一些说明。

(1) 定理 5.1 说明，如果方程组 (5.3) 的耦合是较弱的，那么它有粘性解。性质 5.2 可以弱化为强制性增长条件，见命题 5.1. 条件 $\chi < 1$ 需要替换成一个更复杂的条件，因为 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 相对应的 Lagrange 函数可能是无界的。

(2) 当 $\chi < 1$，方程组 (5.3) 可以与 (1.2) 作类比，其中方程关于未知函数是严格单调递增或递减的。定理 5.2 处理了一个特殊的临界情况，此时 $\chi = 1$。这个情形可以类比于单个方程 $G(x, Du) = c$.

(3) 如果 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 满足定理 5.1 的条件，那么 $H_i(x, p, u_i, u_j) - c_i$ 也满足这些条件，对任意 $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$，方程

$$H_i(x, Du_i(x), u_i(x), u_j(x)) = c_i \tag{5.4}$$

都有粘性解。由 [85] 定理 21，当性质 5.1, 5.2, 5.4 成立，存在 $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ 使得 (5.4) 有粘性解。

线性耦合

对于 $i \in \{1,2\}$，令 $h_i : T^*M \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且关于 p 强制增长。考虑下面方程组

$$h_i(x, Du_i(x)) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}(x) u_j(x) = 0, \quad x \in M,\ i \in \{1,2\}. \tag{5.5}$$

这里我们假设 $\lambda_{ij}(x), i, j \in \{1,2\}$ 连续，并且 $\lambda_{ii}(x) > 0, \lambda_{ij}(x) < 0$ 对所有 $i \neq j \in \{1,2\}$ 成立。

注 5.3 **(1)** 假设 (5.2) 成立，并且 $\sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}(x) > 0$ 对某个 $i \in \{1,2\}$ 成立 (即矩阵 $(\lambda_{ij}(x))$ 是可逆的)，那么由命题 5.1，方程组 (5.5) 有粘性解。当 $\sum_{i=1}^{2} \lambda_{ij}(x) = 0$ 对所有 $i \in \{1,2\}$ 成立，这种情形作为一种临界情形在定理 5.2 中被考虑。在 [81] 中，这种临界情形被称为是退化的。

(2) 如果用 $\chi \leq 1$ 替换条件 $\sum_{j=1}^{2} \lambda_{1j}(x) \geq 0$. 令 (u_1, u_2) 是 (5.5) 的粘性解。定义 $v_1 := u_1/\lambda_1$，那么 (v_1, u_2) 是 (5.2) 成立的时候 (5.5) 的粘性解。因此，当 $\lambda_{ii}(x) > 0$ 并且 $\lambda_{ij}(x) < 0$ 对所有 $i \neq j \in \{1,2\}$ 成立的时候，条件 $\chi \leq 1$ 和 (5.2) 本质上是相同的。当 $\chi < 1$, 根据 [81] 命题 2.10，(5.5) 的粘性解是唯一的。

现在，对于每个 $i \in \{1,2\}$，我们假设 $h_i(x,p)$ 满足如下假设：

性质 5.8 $h_i(x,p)$ 是局部 Lipschitz 连续的。

性质 5.9 $h_i(x,p)$ 关于 p 是强制性增长的，即 $\lim_{|p|_x \to +\infty}(\inf_{x\in M} h_i(x,p)) = +\infty$.

性质 5.10 $h_i(x,p)$ 关于 p 是严格凸的。

性质 5.8, 5.10 保证了粘性解的半凹性。下面，我们假设 $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 是定义在 M 上的两个正函数，并且是 Lipschitz 连续的。

注 5.4 令 $\varepsilon > 0$，$c \in \mathbb{R}$ 并且 $(u_i^{\varepsilon,c})_{i\in\{1,2\}}$ 是下面方程组的粘性解

$$\begin{cases} h_1(x, Du_1(x)) + \lambda_1(x)(u_1(x) - u_2(x)) = c, \\ h_2(x, Du_2(x)) + \varepsilon u_2(x) + \lambda_2(x)(u_2(x) - u_1(x)) = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

为了得到 (5.6) 的粘性解，根据 Perron 方法，我们需要构造粘性上解 Ψ_i 和粘性下解 ψ_i 并且满足 $\psi_i(x) \leq \Psi_i(x)$. 但是，命题 5.1 可以直接说明 (5.6) 粘性解的存在性。由 [81] 命题 2.10，粘性解 $(u_i^{\varepsilon,c})_{i\in\{1,2\}}$ 是唯一的。

方程组 (5.6) 可以类比为一个打折方程。因此，我们利用关于 (5.6) 的打折项消失方法去得到下面临界情形的粘性解的存在性

$$\begin{cases} h_1(x, Du_1(x)) + \lambda_1(x)(u_1(x) - u_2(x)) = c, \\ h_2(x, Du_2(x)) + \lambda_2(x)(u_2(x) - u_1(x)) = d. \end{cases} \tag{5.7}$$

定理 5.2 存在唯一 $d = \alpha(c)$ 使得 (5.7) 有解。函数 $c \mapsto \alpha(c)$ 单调非增，并且具有 Lipschitz 常数 $\max_{x\in M} \lambda_2(x)/\min_{x\in M} \lambda_1(x)$.

推论 5.1 如果 $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 是常数，那么 $\alpha(c) = \alpha(0) - (\lambda_2/\lambda_1)c$.

由连续性，存在唯一的 $c_0 \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha(c_0) = c_0$. 从而

推论 5.2 存在唯一的 $c_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$h_i(x, Du_i(x)) + \lambda_i(x)(u_i(x) - u_j(x)) = c_0, \quad x \in M, \ i \neq j \in \{1, 2\}$$

有粘性解。

注 5.5 推论 5.2 中的结论在 [81] 定理 2.12 中已经给出了。事实上，推论 5.2 能导出推论 5.1. 令 c_0 是在 (5.7) 中取 $c = d = c_0$ 的时候有解的常数。那么对于每个 $c \in \mathbb{R}$，函数对 $(u_1, u_2 - (c - c_0)/\lambda_1)$ 是 (5.7) 中取 $d = c_0 - (\lambda_2/\lambda_1)(c - c_0)$ 的粘性解。

5.1.2　定理 5.1 的证明

在本小节，我们将性质 5.2 弱化为

性质 5.11 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 关于 p 强制增长，即

$$\lim_{|p|_x \to +\infty} (\inf_{x \in M} H_i(x, p, 0, 0)) = +\infty.$$

下面我们记 **(I')** 为性质 5.1, 5.11, 5.4, 5.5, 5.7，**(D')** 为性质 5.1, 5.11, 5.3, 5.4, 5.6, 5.7. 对应于 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 的 Lagrange 函数定义为

$$L_i(x, \dot{x}, u_i, u_j) := \sup_{p \in T_x^* M} \{\langle \dot{x}, p \rangle - H_i(x, p, u_i, u_j)\}, \tag{5.8}$$

类似于引理 2.5，可以证明

引理 5.1 存在与 i 无关的常数 $\delta > 0$ 和 $C > 0$ 使得对于 $i \in \{1, 2\}$, Lagrange 函数 $L_i(x, \dot{x}, 0, 0)$ 满足

$$L_i(x, \dot{x}, 0, 0) \leq C, \quad \forall (x, \dot{x}) \in M \times \bar{B}(0, \delta).$$

定义 $\mu := \mathrm{diam}(M)/\delta$.

命题 5.1 令 λ_1 和 λ_2 是性质 5.7 中给出的常数。方程组 (5.3) 有粘性解当且仅当下面的条件成立其一：

(a) 每个 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 满足条件 (I')，并且

$$\lambda_1 \lambda_2 < 1.$$

(b) 每个 $H_i(x, p, u_i, u_j)$ 满足条件 (D')，并且令 $\mu > 0$ 是引理 5.1 中给出的常数，那么

$$\left((1 + \Theta\mu e^{\Theta\mu})\lambda_1 + \Theta\mu e^{\Theta\mu}\right)\left((1 + \Theta\mu e^{\Theta\mu})\lambda_2 + \Theta\mu e^{\Theta\mu}\right) < 1.$$

(c) $H_i(x,p,u_i,u_j)$ 满足条件 (I') 并且 $H_j(x,p,u_j,u_i)$ 满足条件 (D')，$i \neq j \in \{1,2\}$，令 $\mu > 0$ 是引理 5.1 中给出的常数，那么

$$\lambda_i\left((1+\Theta\mu e^{\Theta\mu})\lambda_j + \Theta\mu e^{\Theta\mu}\right) < 1.$$

注 5.6 定理 2.1 可以由命题 5.1 直接得到。如果 $H_i(x,p,u_i,u_j)$ 满足性质 5.2 而不是性质 5.11，那么 $L_i(x,\dot{x},u_i,u_j)$ 对所有 $\dot{x} \in T_xM$ 都是有界的。如果 $\lambda_1\lambda_2 < 1$，我们可以取 $\mu > 0$ 足够小，使得命题 5.1 中的条件 (b) 和 (c) 成立。

令 $u_2^0 \equiv 0$ 并且对于 $n = 0,1,2,\ldots$ 考虑下面的迭代过程

$$\begin{cases} H_1(x, Du_1^n(x), u_1^n(x), u_2^n(x)) = 0, \\ H_2(x, Du_2^{n+1}(x), u_2^{n+1}(x), u_1^n(x)) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

注 5.7 假设 u_1^n 和 u_2^n 关于 n 都是一致有界的。由性质 5.11，u_1^n 和 u_2^n 关于 n 都是等度 Lipschitz 连续的。由 Arzela-Ascoli 定理，存在一列 (u_1^n, u_2^n) 一致收敛到 (u,v). 由粘性解的稳定性，(u,v) 是 (5.3) 的一个粘性解。

令 Θ, C, μ 和 λ_i 是性质 5.4, 5.7 和引理 5.1 中给出的常数。在本小节，我们定义

$$\mathbb{H}_i := \|H_i(x,0,0,0)\|_\infty, \quad A := \Theta\mu e^{\Theta\mu}, \quad B := C\mu e^{\Theta\mu}, \quad \bar{\lambda}_i := (1+A)\lambda_i + A.$$

以及

$$\kappa := \lambda_1\lambda_2, \quad \bar{\kappa} := \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2, \quad \tilde{\kappa} := \lambda_1\bar{\lambda}_2.$$

Case (a)

我们先在 $H_i(x,p,u_i,u_j)$ 满足条件 (I') 的假设下证明命题 5.1.

引理 5.2 对于 $i \in \{1,2\}$ 和 $v(x) \in C(M)$，下面方程存在唯一的粘性解 $u(x)$

$$H_i(x, Du, u, v(x)) = 0. \tag{5.10}$$

此外，有 $\|u(x)\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \lambda_i\|v\|_\infty$.

证明 由性质 5.7 我们有

$$\begin{aligned} &|H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,0,0)| \cdot \lambda_1\|v\|_\infty \\ &\leq \lambda_1\big(H_i(x,0,\lambda_1\|v\|_\infty, v(x)) - H_i(x,0,0,v(x))\big)|v(x)| \\ &\leq \big(H_i(x,0,\lambda_1\|v\|_\infty, v(x)) - H_i(x,0,0,v(x))\big)\cdot\lambda_1\|v\|_\infty, \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &|H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,0,0)| \\ &\leq H_i(x,0,\lambda_1\|v\|_\infty, v(x)) - H_i(x,0,0,v(x)). \end{aligned} \tag{5.11}$$

类似地有

$$\begin{aligned} &|H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,0,0)| \\ &\le H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,-\lambda_1\|v\|_\infty, v(x)). \end{aligned} \tag{5.12}$$

由性质 5.5 以及 (5.11)，有

$$\begin{aligned} &H_i(x,0,\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) - H_i(x,0,\lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) \\ &+ H_i(x,0,\lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) - H_i(x,0,0,v(x)) + H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,0,0) \\ &\ge \mathbb{H}_i. \end{aligned}$$

由性质 5.5 和 (5.12)，有

$$\begin{aligned} &H_i(x,0,0,0) - H_i(x,0,0,v(x)) + H_i(x,0,0,v(x)) - H_i(x,0,-\lambda_i\|v\|_\infty, v) \\ &+ H_i(x,0,-\lambda_i\|v\|_\infty, v) - H_i(x,0,-\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i - \lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) \ge \mathbb{H}_i, \end{aligned}$$

因此对所有 $x \in M$，有

$$H_i(x,0,\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) \ge 0,$$

以及

$$H_i(x,0,-\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i - \lambda_i\|v\|_\infty, v(x)) \le 0,$$

从而 $\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \lambda_i\|v\|_\infty$ (resp. $-\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i - \lambda_i\|v\|_\infty$) 是 (5.10) 的粘性上解 (resp. 粘性下解). 因此，由 Perron 方法，(5.10) 的粘性解 $u(x)$ 存在。利用比较定理，粘性解 $u(x)$ 是唯一的，并且 $\|u(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \lambda_i\|v\|_\infty$. ∎

引理 5.3 对于 $n = 1, 2, \dots$，有

$$\|u_1^n\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\kappa^l\mathbb{H}_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n-1}\kappa^l\mathbb{H}_2,$$

以及

$$\|u_2^{n+1}\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n}\kappa^l\mathbb{H}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\kappa^l\mathbb{H}_1.$$

证明 我们利用归纳法证明。首先说明 $n = 1$ 的时候结论成立。由引理 5.2，有

$$\begin{aligned} &\|u_1^0(x)\|_\infty \le \frac{\mathbb{H}_1}{\lambda_{11}}, \\ &\|u_2^1(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \lambda_2\|u_1^0(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \frac{\lambda_2\mathbb{H}_1}{\lambda_{11}}, \\ &\|u_1^1(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + \lambda_1\|u_2^1(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{11}}(1+\kappa)\mathbb{H}_1 + \frac{\lambda_1\mathbb{H}_2}{\lambda_{22}}, \\ &\|u_2^2(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \lambda_2\|u_1^1(x)\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{22}}(1+\kappa)\mathbb{H}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_{11}}(1+\kappa)\mathbb{H}_1. \end{aligned}$$

假设结论在 $n=k-1$ 的时候成立。我们要证明在 $n=k$ 时结论也成立。由引理 5.2，有

$$
\begin{aligned}
\|u_1^k(x)\|_\infty &\le \frac{1}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + \lambda_1\|u_2^k(x)\|_\infty \\
&\le \frac{1}{\lambda_{11}}(1+\lambda_1\lambda_2\sum_{l=0}^{k-1}\kappa^l)\mathbb{H}_1 + \lambda_1\frac{1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k-1}\kappa^l\mathbb{H}_2 \\
&= \frac{1}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\kappa^l\mathbb{H}_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k-1}\kappa^l\mathbb{H}_2,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\|u_2^{k+1}(x)\|_\infty &\le \frac{1}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \lambda_2\|u_1^k(x)\|_\infty \\
&\le \frac{1}{\lambda_{22}}(1+\lambda_2\lambda_1\sum_{l=0}^{k-1}\kappa^l)\mathbb{H}_2 + \lambda_2\frac{1}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\kappa^l\mathbb{H}_1 \\
&= \frac{1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k}\kappa^l\mathbb{H}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\kappa^l\mathbb{H}_1.
\end{aligned}
$$

证毕。 ∎

由假设 $\kappa<1$. 那么 u_1^n 和 u_2^n 都是关于 n 一致有界的。由注 5.3，(5.3) 存在粘性解。

Case (b)

现在我们在 $H_i(x,p,u_i,u_j)$ 满足条件 (D') 的假设下证明命题 5.1. 如果 $H_i(x,p,u_1,u_2)$ 满足条件 (D')，比较定理不成立。因此，我们不能直接得到引理 5.2 中的结论。

引理 5.4 对于每个 $i\in\{1,2\}$ 以及 $v(x)\in C(M)$，(5.10) 的方程组有粘性解。对所有 (5.10) 的粘性解 $u(x)$，有

$$
\|u(x)\|_\infty \le \frac{1+A}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \bar{\lambda}_i\|v\|_\infty + B.
$$

证明 我们首先说明 (5.10) 粘性解的存在性。由定理 2.3，我们转而考虑

$$
F_i(x,Du,u,v(x)) = 0, \tag{5.13}
$$

其中 $F_i(x,p,u_i,u_j) := H_i(x,-p,-u_i,u_j)$. 由 F_i 的定义，容易证明

$$
\|F_i(x,0,0,0)\|_\infty = \|H_i(x,0,0,0)\|_\infty,
$$

并且对于所有 $u_i\ge v_i,(x,p,v)\in T^*M\times\mathbb{R}$，有

$$
F_i(x,p,u_i,v) - F_i(x,p,v_i,v) \ge \lambda_{ii}(u_i-v_i),
$$

并且对所有 $u_i,u_j,v_i,v_j\in\mathbb{R},(x,v)\in M\times\mathbb{R}$，有

$$
\begin{aligned}
&|\big(F_i(x,0,0,u_j)-F_i(x,0,0,v_j)\big)(u_i-v_i)| \\
&\le \lambda_i|\big(F_i(x,0,u_i,v)-F_i(x,0,v_i,v)\big)(u_j-v_j)|.
\end{aligned}
$$

由引理 5.2，$\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i+\lambda_i\|v\|_\infty$ (resp. $-\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i-\lambda_i\|v\|_\infty$) 是方程 (5.13) 的粘性上解 (resp. 粘性下解). 由 Perron 方法，方程 (5.13) 有粘性解 u_-，再根据定理 2.3，方程 (5.10) 有粘性解。此外，有 $\|u_-\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i+\lambda_i\|v\|_\infty$.

利用命题 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_\infty &= \|-v_+\|_\infty \\
&\le (1+\Theta\mu e^{\Theta\mu})\|u_-\|_\infty + C\mu e^{\Theta\mu} + \Theta\mu e^{\Theta\mu}\|v(x)\|_\infty \\
&\le (1+A)(\frac{1}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i+\lambda_i\|v\|_\infty) + B + A\|v(x)\|_\infty \\
&= \frac{1+A}{\lambda_{ii}}\mathbb{H}_i + \bar{\lambda}_i\|v\|_\infty + B,
\end{aligned}$$

其中 v_+ 是 (5.13) 的一个正向弱 KAM 解。 ∎

引理 5.5 对于 $n=1,2,\dots$，有

$$\|u_1^n\|_\infty \le \frac{1+A}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n-1}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + (\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_1\sum_{l=0}^{n-1}\bar{\kappa}^l)B,$$

以及

$$\|u_2^{n+1}\|_\infty \le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_2}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + (\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_2\sum_{l=0}^{n}\bar{\kappa}^l)B.$$

证明 我们利用归纳法证明。我们首先说明 $n=1$ 的时候结论成立。由引理 5.4，有

$$\begin{aligned}
\|u_1^0(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + B, \\
\|u_2^1(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \bar{\lambda}_2\|u_1^0(x)\|_\infty + B \\
&\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_2}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + (1+\bar{\lambda}_2)B, \\
\|u_1^1(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + \bar{\lambda}_1\|u_2^1(x)\|_\infty + B \\
&\le \frac{1+A}{\lambda_{11}}(1+\bar{\kappa})\mathbb{H}_1 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_1}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + (1+\bar{\kappa}+\bar{\lambda}_1)B, \\
\|u_2^2(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \bar{\lambda}_2\|u_1^1(x)\|_\infty + B \\
&\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}(1+\bar{\kappa})\mathbb{H}_2 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_2}{\lambda_{11}}(1+\bar{\kappa})\mathbb{H}_1 + (1+\bar{\kappa}+\bar{\lambda}_2(1+\bar{\kappa}))B.
\end{aligned}$$

假设结论在 $n=k-1$ 的时候成立。我们需要证明当 $n=k$ 时结论成立。由引理 5.4，有

$$\begin{aligned}
\|u_1^k(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{11}}\mathbb{H}_1 + \bar{\lambda}_1\|u_2^k(x)\|_\infty + B \\
&\le \frac{1+A}{\lambda_{11}}(1+\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l)\mathbb{H}_1 + \bar{\lambda}_1\frac{1+A}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k-1}\kappa^l\mathbb{H}_2 \\
&\quad + \bar{\lambda}_1(\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_2\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l)B + B \\
&= \frac{1+A}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + (\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_1\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l)B,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\|u_2^{k+1}(x)\|_\infty &\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\mathbb{H}_2 + \bar{\lambda}_2\|u_1^k(x)\|_\infty + B\\ &\le \frac{1+A}{\lambda_{22}}(1+\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l)\mathbb{H}_2 + \bar{\lambda}_2\frac{1+A}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\kappa^l\mathbb{H}_1\\ &\quad + \bar{\lambda}_2(\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_1\sum_{l=0}^{k-1}\bar{\kappa}^l)B + B\\ &= \frac{1+A}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + \frac{(1+A)\bar{\lambda}_2}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + (\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l + \bar{\lambda}_2\sum_{l=0}^{k}\bar{\kappa}^l)B.\end{aligned}$$

证毕。 ∎

由假设 $\bar{\kappa} < 1$，那么 u_1^n 和 u_2^n 关于 n 是一致有界的。由注 5.3，方程组 (5.3) 存在粘性解。

Case (c)

现在，不失一般性，我们假设 $H_1(x,p,u_1,u_2)$ 满足条件 (I')，$H_2(x,p,u_2,u_1)$ 满足条件 (D').

引理 5.6 对于 $n = 1,2,\dots$，有

$$\|u_1^n\|_\infty \le \frac{1}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\tilde{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + \frac{(1+A)\lambda_1}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + \lambda_1\sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\kappa}^l B.$$

以及

$$\|u_2^{n+1}\|_\infty \le \frac{1+A}{\lambda_{22}}\sum_{l=0}^{n}\tilde{\kappa}^l\mathbb{H}_2 + \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_{11}}\sum_{l=0}^{n}\tilde{\kappa}^l\mathbb{H}_1 + \sum_{l=0}^{n}\tilde{\kappa}^l B.$$

引理 5.6 的证明与引理 5.3 和引理 5.5 的证明类似，我们略去证明。由假设 $\tilde{\kappa} < 1$，那么 u_1^n 和 u_2^n 关于 n 是一致有界的。由注 5.3，方程组 (5.3) 存在粘性解。

5.1.3 定理 5.2 的证明

Step 1. 我们首先证明对于 $c \in \mathbb{R}$，存在唯一的常数 $d = \alpha(c) \in \mathbb{R}$ 使得 (5.7) 有粘性解。不失一般性，我们假设 $c = 0$. 由注 5.4，我们记 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 为 (5.6) 在 $c = 0$ 的时候的唯一粘性解。

引理 5.7 函数族 $\{\varepsilon u_2^\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ 关于 ε 是一致有界的。

证明 令 x_1 和 x_2 分别是 $u_1^\varepsilon(x)$ 和 $u_2^\varepsilon(x)$ 的极小点。由性质 5.9，u_i^ε 是 Lipschitz 连续的。因此根据 [4] 定理 5.3.7，u_i^ε 是半凹的。因此，对于 $i \in \{1,2\}$，u_i^ε 在 x_i 处可微，并且 $Du_i^\varepsilon(x_i) = 0$. 带回 (5.6) 我们得到

$$\begin{aligned}&h_1(x_1,0) + \lambda_1(x_1)(u_1^\varepsilon(x_2) - u_2^\varepsilon(x_2))\\ &\ge h_1(x_1,0) + \lambda_1(x_1)(u_1^\varepsilon(x_1) - u_2^\varepsilon(x_1)) = 0,\end{aligned} \tag{5.14}$$

以及

$$h_2(x_2,0) + \varepsilon u_2^\varepsilon(x_2) + \lambda_2(x_2)(u_2^\varepsilon(x_2) - u_1^\varepsilon(x_2)) = 0. \tag{5.15}$$

将 (5.14) 乘以 $\lambda_2(x_2)/\lambda_1(x_1)$ 再加上 (5.15)，我们得到

$$\frac{\lambda_2(x_2)}{\lambda_1(x_1)}h_1(x_1,0) + h_2(x_2,0) + \varepsilon u_2^\varepsilon(x_2) \ge 0,$$

从而

$$\varepsilon u_2^\varepsilon(x) \ge \varepsilon u_2^\varepsilon(x_2) \ge -(\imath\|h_1(x,0)\|_\infty + \|h_2(x,0)\|_\infty).$$

其中 $\imath := \max_{x\in M}\lambda_2(x)/\min_{x\in M}\lambda_1(x)$. 既然 u_1^ε 和 u_2^ε 都是半凹的，对于任意 $\epsilon>0$ 和 $i\in\{1,2\}$，存在一点 y_i 使得 u_i^ε 在 y_i 处可微，并且

$$u_i^\varepsilon(y_i) \ge \max_{x\in M} u_i^\varepsilon(x) - \epsilon.$$

带回 (5.6)，有

$$\begin{aligned}
&h_1(y_1, Du_1^\varepsilon(y_1)) + \lambda_1(y_1)(u_1^\varepsilon(y_2) - u_2^\varepsilon(y_2))\\
&\le h_1(y_1, Du_1^\varepsilon(y_1)) + \lambda_1(y_1)\max_{x\in M} u_1^\varepsilon(x) - \lambda_1(y_1)(u_2^\varepsilon(y_1) - \epsilon)\\
&\le h_1(y_1, Du_1^\varepsilon(y_1)) + \lambda_1(y_1)(u_1^\varepsilon(y_1) - u_2^\varepsilon(y_1)) + 2\lambda_1(y_1)\epsilon = 2\lambda_1(y_1)\epsilon,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

以及

$$h_2(y_2, Du_2^\varepsilon(y_2)) + \varepsilon u_2^\varepsilon(y_2) + \lambda_2(y_2)(u_2^\varepsilon(y_2) - u_1^\varepsilon(y_2)) = 0. \tag{5.17}$$

将 (5.16) 乘以 $\lambda_2(y_2)/\lambda_1(y_1)$ 再加上 (5.17)，我们得到

$$\frac{\lambda_2(y_2)}{\lambda_1(y_1)} h_1(y_1, Du_1^\varepsilon(y_1)) + h_2(y_2, Du_2^\varepsilon(y_2)) + \varepsilon u_2^\varepsilon(y_2) \le 2\lambda_2(y_2)\epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
\varepsilon u_2^\varepsilon(x) &\le \varepsilon \max_{x\in M} u_2^\varepsilon(x)\\
&\le \imath\left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_1(x,p)\right| + \left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_2(x,p)\right| + (2\|\lambda_2(x)\|_\infty + \varepsilon)\epsilon.
\end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0+$，我们得到

$$\varepsilon u_2^\varepsilon(x) \le \imath\left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_1(x,p)\right| + \left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_2(x,p)\right|.$$

由性质 5.9，$\min_{(x,p)\in T^*M} h_i(x,p), i\in\{1,2\}$ 是有限的。因此 $\varepsilon u_2^\varepsilon(x)$ 关于 ε 是一致有界的。 ∎

引理 5.8 函数 u_1^ε 和 u_2^ε 关于 ε 是等度 Lipschitz 连续的。

证明 将 (5.6) 第一式乘以 $\lambda_2(x)/\lambda_1(x)$ 再加上 (5.6) 的第二式，得到

$$\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} h_1(x, Du_1^\varepsilon(x)) + h_2(x, Du_2^\varepsilon(x)) = -\varepsilon u_2^\varepsilon(x),$$

从而

$$h_1(x, Du_1^\varepsilon(x)) \le \tilde\imath\left(\imath\|h_1(x,0)\|_\infty + \|h_2(x,0)\|_\infty + \left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_2(x,p)\right|\right),$$

以及

$$h_2(x, Du_2^\varepsilon(x)) \le \imath\|h_1(x,0)\|_\infty + \|h_2(x,0)\|_\infty + \imath\left|\min_{(x,p)\in T^*M} h_1(x,p)\right|,$$

其中 $\tilde\imath := \max_{x\in M}\lambda_1(x)/\min_{x\in M}\lambda_2(x)$. 因此 $\|Du_1^\varepsilon\|_\infty$ 和 $\|Du_2^\varepsilon\|_\infty$ 关于 ε 是一致有界的。 ∎

固定 $x_0 \in M$，定义

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^\varepsilon(x) = u_1^\varepsilon(x) - u_2^\varepsilon(x_0), \\ \tilde{u}_2^\varepsilon(x) = u_2^\varepsilon(x) - u_2^\varepsilon(x_0). \end{cases}$$

函数对 $(\tilde{u}_1^\varepsilon, \tilde{u}_2^\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases} h_1(x, D\tilde{u}_1^\varepsilon(x)) + \lambda_1(x)(\tilde{u}_1^\varepsilon(x) - \tilde{u}_2^\varepsilon(x)) = 0, \\ h_2(x, D\tilde{u}_2^\varepsilon(x)) + \varepsilon\tilde{u}_2^\varepsilon(x) + \lambda_2(x)(\tilde{u}_1^\varepsilon(x) - \tilde{u}_2^\varepsilon(x)) + \varepsilon u_2^\varepsilon(x_0) = 0. \end{cases}$$

由于 $\|Du_1^\varepsilon\|_\infty$ 是一致有界的，根据 (5.6) 的第一式，$\tilde{u}_1^\varepsilon(x_0) = u_1^\varepsilon(x_0) - u_2^\varepsilon(x_0)$ 关于 ε 是一致有界的。同时 $\tilde{u}_2^\varepsilon(x_0) = 0$. 因此 $\tilde{u}_1^\varepsilon(x)$ 和 $\tilde{u}_2^\varepsilon(x)$ 关于 ε 是一致有界等度 Lipschitz 连续的。同时我们还证明了 $-\varepsilon u_2^\varepsilon(x_0)$ 是有界的。因此存在 $\varepsilon_k \to 0+$ 使得 $(\tilde{u}_1^\varepsilon, \tilde{u}_2^\varepsilon)$ 一致收敛于 (u, v)，并且 $-\varepsilon u_2^\varepsilon(x_0)$ 趋于 $d_0 \in \mathbb{R}$. 由粘性解的稳定性，(u, v) 是 (5.7) 中取 $c = 0$ 和 $d = d_0$ 的粘性解。

现在我们证明 d_0 是使得 (5.7) 有粘性解的唯一常数。这里我们依然令 $c = 0$. 假设有两个不同的实数 $d_1 < d_2$ 使得 (5.7) 中取 $d = d_1$ 和 $d = d_2$ 时分别有粘性解 (u_1, u_2) 和 (v_1, v_2). 当 $\varepsilon > 0$ 足够小，有 $d_1 + \varepsilon u_2 \le d_2 + \varepsilon v_2$. 注意到对于 $k \in \mathbb{R}$，函数对 $(u_1 + k, u_2 + k)$ 还是 (5.7) 中取 $c = 0$ 和 $d = d_1$ 的粘性解. 令 $k > 0$ 足够大，我们可以假设 $u_1 > v_1, u_2 > v_2$. 从而

$$\begin{cases} h_1(x, Du_1) + \lambda_1(x)(u_1 - u_2) = 0, \\ h_2(x, Du_2) + \varepsilon u_2 + \lambda_2(x)(u_2 - u_1) = d_1 + \varepsilon u_2 \le d_2 + \varepsilon v_2. \end{cases}$$

根据 [81] 命题 2.10，我们有 $u_1 \le v_1$ 和 $u_2 \le v_2$，这与 $u_1 > v_1$ 和 $u_2 > v_2$ 矛盾。

Step 2. 现在我们考虑函数 $\alpha(c)$ 的性质。令 $(u_i^{\varepsilon,c})_{i\in\{1,2\}}$ 是 (5.6) 的粘性解。取 $c_1 > c_2$. 根据 [81] 命题 2.10，$u_2^{\varepsilon,c_1} \ge u_2^{\varepsilon,c_2}$. 由 Step 1，$\alpha(c)$ 是序列 $-\varepsilon_k u_2^{\varepsilon_k,c}(x)$ 的极限。因此 $\alpha(c_1) \le \alpha(c_2)$. 定义

$$K_1 := \frac{\max_{x\in M} \lambda_2(x) + \varepsilon}{\varepsilon \min_{x\in M} \lambda_1(x)}(c_1 - c_2), \quad K_2 := \frac{\max_{x\in M} \lambda_2(x)}{\varepsilon \min_{x\in M} \lambda_1(x)}(c_1 - c_2).$$

那么

$$\begin{cases} h_1(x, Du_1^{\varepsilon,c_1}) + \lambda_1(x)\big((u_1^{\varepsilon,c_1} - K_1) - (u_2^{\varepsilon,c_1} - K_2)\big) = c_1 + \lambda_1(x)(K_2 - K_1) \le c_2, \\ h_2(x, u_2^{\varepsilon,c_1}) + (\lambda_2(x) + \varepsilon)(u_2^{\varepsilon,c_1} - K_2) - \lambda_2(x)(u_1^{\varepsilon,c_1} - K_1) = \lambda_2(x)(K_1 - K_2) - \varepsilon K_2 \le 0. \end{cases}$$

从而根据 [81] 命题 2.10，有 $u_2^{\varepsilon,c_1} - u_2^{\varepsilon,c_2} \le K_2$. 注意到下面等式恒成立

$$\alpha(c_1) - \alpha(c_2) = [\alpha(c_1) + \varepsilon u_2^{\varepsilon,c_1}] + [\varepsilon u_2^{\varepsilon,c_2} - \varepsilon u_2^{\varepsilon,c_1}] - [\varepsilon u_2^{\varepsilon,c_2} + \alpha(c_2)].$$

由于 $\varepsilon u_2^{\varepsilon,c_1}$ 和 $\varepsilon u_2^{\varepsilon,c_2}$ 都是序列紧的，存在 $\varepsilon_k \to 0+$ 使得 $\varepsilon_k u_2^{\varepsilon_k,c_1}$ 趋于 $-\alpha(c_1)$ 同时 $\varepsilon_k u_2^{\varepsilon_k,c_2}$ 趋于 $-\alpha(c_2)$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\varepsilon u_2^{\varepsilon,c_2} - \varepsilon u_2^{\varepsilon,c_1} \ge -\varepsilon K_2 = -\frac{\max_{x\in M} \lambda_2(x)}{\min_{x\in M} \lambda_1(x)}(c_1 - c_2).$$

我们得到

$$-\frac{\max_{x\in M} \lambda_2(x)}{\min_{x\in M} \lambda_1(x)}(c_1 - c_2) \le \alpha(c_1) - \alpha(c_2) \le 0, \quad \forall c_1 > c_2.$$

最后，我们证明推论 5.1. 当 $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 是常数，我们有 $u_2^{\varepsilon,c_1} - u_2^{\varepsilon,c_2} = K_2$，其中 $K_2 = \frac{\lambda_2}{\varepsilon\lambda_1}(c_1 - c_2)$. 因此，函数 $\alpha(c)$ 是线性的，具有斜率 $-\lambda_2/\lambda_1$.

5.2 多类型参与者的平均场博弈模型

在本节，我们引入一类可以描述多类型参与者的平均场博弈模型。同时，我们证明了这类模型广义解的存在性。

5.2.1 主要结论

我们考虑如下的模型

$$
\begin{cases}
H_i(x, Du_i(x)) + \sum_{j=1}^{k} B_{ij}(x)u_j(x) = F_i(x, m_1, \dots, m_k), & (5.18)\\
\operatorname{div}\left(m_i \frac{\partial H_i}{\partial p}(x, Du_i(x))\right) = 0, & (5.19)\\
\int_M m_i dx = 1. & (5.20)
\end{cases}
$$

经典的平均场博弈模型处理的是大量的同类型参与者。其中每个参与者的代价函数由同一个 Hamilton 函数 H 给出。文献 [91] 指出，在大多数实际的金融问题中，不仅仅只有一类参与者。因此考虑多类型参与者的模型是十分自然的。模型 (5.18)-(5.20) 刻画了有 k 种类型的参与者的系统。每类型参与者的 Hamilton 函数是彼此不同的。第 i 类参与者的代价函数由 Hamilton 函数 H_i，第 j 类参与者的代价函数值 u_j，以及第 j 类参与者的分布 m_j 决定。这个系统的耦合项只有 u_j 和 m_j，而不含导数。

对于 $i \in \{1, \dots, k\}$，我们假设 Hamilton 函数 $H_i : T^*M \to \mathbb{R}$ 是 C^2 的，满足 Tonelli 条件，即性质 1.5，以及关于 p 对称，即对所有 $(x, p) \in T^*M$，有 $H_i(x, p) = H_i(x, -p)$. 同时我们假设 $(B_{ij}(x))$ 是 C^2 的，满足

(B) 矩阵 $(B_{ij}(x))$ 是不可约化的 (即方程组 (5.18) 不能解耦)，并且

$$B_{ij}(x) \le 0 \text{ if } i \ne j, \quad \sum_{j=1}^{k} B_{ij}(x) > 0 \text{ for all } i \in \{1, \dots, k\}.$$

令 $\mathscr{P}(M)$ 和 $\mathscr{P}(T^*M)$ 分别表示 M 和 T^*M 上的 Borel 概率测度全体。它们是 w^*-紧的。令 X 表示 M 或者 T^*M. 序列 $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ 被称为 w^*-收敛于 $\mu \in \mathscr{P}(X)$，如果

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f(x)d\mu_k = \int_X f(x)d\mu, \quad \forall f \in C_b(X),$$

这里 $C_b(X)$ 表示 X 上有界一致连续函数全体。下面我们考虑 Monge-Wasserstein 距离 d_1，定义为

$$d_1(m_1, m_2) = \sup_h \int_M hd(m_1 - m_2), \quad \forall m_1,\ m_2 \in \mathscr{P}(X),$$

这里极大值在 X 上所有 1-Lipschitz 连续函数类中取。此外，d_1 可作为 w^*-拓扑对应的度量。下面将乘积空间 $\mathscr{P}(X)^k$ 赋予乘积拓扑。那么由 Tychonoff 定理，$\mathscr{P}(X)^k$ 是紧的，并且具有由 d_1 诱导的度量 d^k. 具体而言，对于 $\mathbf{m}^1 = (m_1^1, \dots, m_k^1)$ 以及 $\mathbf{m}^2 = (m_1^2, \dots, m_k^2) \in \mathscr{P}(M)^k$，我们定义

$$d^k(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \max_{1\le i\le k} d_1(m_i^1, m_i^2).$$

由 d^k 诱导的拓扑与乘积拓扑一致。对于 $i \in \{1, \dots, k\}$，函数 $F_i : M \times \mathscr{P}(M)^k \to \mathbb{R}$ 满足

(F1) 对所有 $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_k)\in\mathscr{P}(M)^k$，函数 $x\mapsto F_i(x,\mathbf{m})$ 是 C^2 的，并且满足

$$\sup_{\mathbf{m}}\sum_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha F_i(\cdot,\mathbf{m})\|_\infty<+\infty,$$

其中指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 并且 $D^\alpha=D^{\alpha_1}\dots D^{\alpha_n}$.

(F2) 对所有 $x\in M$，函数 $\mathbf{m}\mapsto F_i(x,\mathbf{m})$ 是 Lipschitz 连续的，并且

$$\sup_{\substack{x\in M\\ \mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2\in\mathscr{P}(M)^k\\ \mathbf{m}_1\neq\mathbf{m}_2}}\frac{|F_i(\cdot,\mathbf{m}_1)-F_i(\cdot,\mathbf{m}_2)|}{d^k(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2)}<+\infty.$$

定义 5.2 方程组 (5.18)-(5.20) 的广义解是 $(\mathbf{u},\mathbf{m})\in C(M,\mathbb{R}^k)\times\mathscr{P}(M)^k$ 使得 (5.18) 在粘性解意义上成立，同时 (5.19) 在分布的意义上成立。

注 5.8 当耦合矩阵满足条件 (B)，那么对每个 $\mathbf{m}\in\mathscr{P}(M)^k$，根据 [81] 命题 2.10，弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组 (5.18) 的粘性解是唯一的。对给定的 $\mathbf{m}\in\mathscr{P}(M)^k$，方程组 (5.18) 的粘性解的存在性由 Perron 方法给出。

定理 5.3 假设性质 1.5，(B) 和 (F1)(F2) 成立，那么 (5.18)-(5.20) 的广义解存在。

注 5.9 与 [92] 相比，方程组 (5.18)-(5.20) 的解的动力学意义较弱。固定 $\mathbf{m}\in\mathscr{P}(M)^k$，(5.18) 的粘性解 $(u_1^m,\dots,u_k^m)$ of (5.18) 是唯一的，并且根据超线性增长性解还是 Lipschitz 连续的。那么 u_i^m 是 $H_i^m(x,Du,u)=0$ 的唯一粘性解，其中

$$H_i^m(x,p,u):=H_i(x,p)+B_{ii}(x)u+\sum_{j=1,j\neq i}^{k}B_{ij}(x)u_j^m(x)-F_i(x,\mathbf{m}) \tag{5.21}$$

关于 x 仅仅是 Lipschitz 连续的。因此关于 H_i^m 的接触 Hamilton 流无法定义。受到 [47] 的启发，我们定义 Mather 测度为支撑在 Mather 集上的闭 Borel 概率测度，见定义 5.3. 如果 $(\mathbf{u},\mathbf{m})$ 是 (5.18)-(5.20) 的广义解，那么对于 $i\in\{1,\dots,k\}$，存在关于 $H_i^m(x,p,u)$ 的 Mather 测度，它在 M 上的测度等于 m_i.

经典的平均场博弈模型最初由 Lasry 和 Lions[93–95]，以及 Caines，Huang 和 Malhamé[96–97] 在研究大规模随机微分博弈的时候引入。下面，我们记 $\mathbb{T}^n$ 是 n 维平坦环面。令 $G:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 C^2 的，关于 p 二次增长。对于 $x\in\mathbb{T}^n$，下面的定态一阶平均场博弈模型的研究可以参见在 [98]

$$\begin{cases}G(x,Du(x))=c+F(x,m),\\ -\operatorname{div}\left(m\dfrac{\partial G}{\partial p}(x,Du(x))\right)=0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{T}^n}m\,dx=1.\end{cases}$$

这个方程组是一个 Hamilton-Jacobi 耦合上一个连续性方程。这里函数 u 定义在 M 上，m 是 M 上的 Borel 概率测度。函数 F 是耦合项。函数 u 可以看作为每个参与者的代价函数或者

目标函数。这个系统的最优控制为 $-\frac{\partial G}{\partial p}(x, Du(x))$. 当每个参与者按照这个最优控制行动，测度 m 由相应的连续性方程给出。

文献 [92] 研究了下面的接触型一阶定态平均场博弈模型

$$\begin{cases} H(x, Du(x), u(x)) = F(x, m), \\ \operatorname{div}\left(m\dfrac{\partial H}{\partial p}(x, Du(x), u(x))\right) = 0, \\ \displaystyle\int_M m dx = 1. \end{cases}$$

其中 $x \in M$ 并且 M 是紧致无边连通的光滑流形。函数 $H: T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质 1.6-1.8. 上面方程组的解 (u, m) 在 [92] 中被给出，并且具有明确的动力学意义。具体而言，存在 $H(x, p, u)$ 生成的接触 Hamilton 流对应的 Mather 测度，它在 M 上的投影等于 m.

注 5.10 当耦合项 $\sum_j B_{ij}u_j$ 不存在，对于 $i \in \{1 \dots, k\}$，我们考虑下面的方程组

$$\begin{cases} H_i(x, Du_i(x)) = c_i + F_i(x, m_1, \dots, m_k), & (5.22)\\ \operatorname{div}\left(m_i\dfrac{\partial H_i}{\partial p}(x, Du_i(x))\right) = 0, & (5.23)\\ \displaystyle\int_M m_i dx = 1. & (5.24) \end{cases}$$

从微分博弈的角度来看，不同类型的参与者之间通过各自的分布相互影响。注 5.9 重提到的困难不复存在。上面方程组解 $(\mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{m})$ 的存在性的证明与 [98] 中非常类似。我们在这里提供一个证明框架。考虑集值映射 $\Psi: \mathscr{P}(M)^k \rightrightarrows \mathscr{P}(M)^k$. 集合 $\Psi(\mathbf{m}) := \{(\mu_1, \dots, \mu_k)\}$，其中每个 μ_i 都是 $H_i(x, Du_i(x)) - F_i(x, \mathbf{m})$ 相对应的投影 Mather 测度。由于紧凸集的乘积依然是紧凸的，我们只需要再验证 Ψ 的图像是闭的。这个性质由 H 的超线性增长性以及 (F2) 保证。因此，根据 Kakutani 不动点定理，Ψ 有不动点 $\bar{\mathbf{m}}$. 对于 $\bar{\mathbf{m}} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k) \in \mathscr{P}(M)^k$，根据定理 1.3，(5.22) 有解 (u_i, c_i)，同时 $\bar{m}_i$ 自然满足 (5.23). 当所有 H_i 和 F_i 相同，方程组 (5.22)-(5.24) 退化为 [98] 中考虑的情形。

5.2.2 主要结论的证明

现在，为记号简洁，我们记 $H(x, p, u)$ 是 (5.21) 中定义的 Hamilton 函数，那么它满足第 3.1 小节的基本假设。令 $\lambda := \max_{1 \le i \le k} \|B_{ii}(x)\|_\infty$ 是 $H(x, p, u)$ 关于 u 的 Lipschitz 常数。相应的 Lagrange 函数为

$$L(x, \dot{x}, u) = L_i(x, \dot{x}) - B_{ii}(x)u - \sum_{j=1, j\ne i}^{k} B_{ij}(x)u_j^m(x) + F_i(x, \mathbf{m}), \tag{5.25}$$

命题 5.2 令 (u_-, u_+) 是定理 3.1 中定义的共轭对，并且 $\mathcal{I}_{(u_-, u_+)}$ 是相应的投影 Aubry 集。对于 $x \in \mathcal{I}_{(u_-, u_+)}$，存在满足 $\gamma(0) = x$ 的 C^1 曲线 $\gamma: (-\infty, \infty) \to M$ 使得 $u_-(\gamma(t)) = u_+(\gamma(t))$ 并且

$$u_\pm(\gamma(t')) - u_\pm(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u_\pm(\gamma(s)))ds, \quad \forall t \le t' \in \mathbb{R}. \tag{5.26}$$

此外，$u_\pm$ 在 x 处可微并且具有相同的导数

$$Du_\pm(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{\gamma}(0), u_\pm(x)). \tag{5.27}$$

此时我们可以定义

$$\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)} := \{(x,p,u):\ x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)},\ p = Du_\pm(x),\ u = u_\pm(x)\}.$$

这里 u_- 和 u_+ 在 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 上是 C^1 的，或者等价地，从 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 到 $\tilde{\mathcal{I}}_{(u_-,u_+)}$ 的提升是连续的。

我们将命题 5.2 的证明分为引理 5.9-5.11.

引理 5.9 给定 $a > 0$. 如果 $u \prec L$，令 $\gamma : [-a,a] \to M$ 是一条 $(u,L,0)$-校准曲线，那么 γ 是 C^1 的并且 u 在 $\gamma(0)$ 处可微。

证明 由引理 B.1，对每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，粘性解 u_i^m 是 Lipschitz 连续的。因此 $H(x,p,u) = H_i^m(x,p,u)$ 关于 x 是局部 Lipschitz 连续的。既然下面的讨论是局部的，我们可以将 TM 看成 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的一个开子集。记 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数。对于不大于 R 的 $\|v_1\|$ 和 $\|v_2\|$，存在常数 $K > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&|L(x_1,v_1,u(x_1)) - L(x_2,v_2,u(x_2))|\\
&\le |L(x_1,v_1,u(x_1)) - L(x_1,v_1,u(x_2))| + |L(x_1,v_1,u(x_2)) - L(x_2,v_2,u(x_2))|\\
&\le \lambda\|Du(x)\|_\infty d(x_1,x_2) + K(d(x_1,x_2) + \|v_1 - v_2\|).
\end{aligned}$$

因此 $(x,\dot{x}) \mapsto L(x,\dot{x},u(x))$ 是局部 Lipschitz 连续的。注意到 $L(x,\dot{x},u)$ 关于 $\dot{x}$ 是严格凸的，根据 [99] 定理 2.1 (ii)，极小曲线 γ 是 C^1 曲线。

下面的讨论与 [60] 引理 4.3 类似。既然我们在 $x := \gamma(0)$ 附近讨论，我们只需要假设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集 U. 我们需要证明对于每个 $y \in U$，有

$$\limsup_{\eta\to 0^+} \frac{u(x+\eta y) - u(x)}{\eta} \le \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{\gamma}(0),u(x)) \cdot y \le \liminf_{\eta\to 0^+} \frac{u(x+\eta y) - u(x)}{\eta}. \tag{5.28}$$

对任意 $\eta > 0$ 和 $0 < \varepsilon \le a$，定义 $\gamma_\eta : [-\varepsilon,0] \to U$ 为 $\gamma_\eta(s) = \gamma(s) + \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\eta y$，那么 $\gamma_\eta(0) = x + \eta y$ 并且 $\gamma_\eta(-\varepsilon) = \gamma(-\varepsilon)$. 既然 γ 是 $(u,L,0)$-校准的，有

$$u(x+\eta y) - u(\gamma(-\varepsilon)) \le \int_{-\varepsilon}^0 L(\gamma_\eta(s),\dot{\gamma}_\eta(s),u(\gamma_\eta(s)))ds,$$

$$u(x) - u(\gamma(-\varepsilon)) = \int_{-\varepsilon}^0 L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma(s)))ds.$$

从而

$$\frac{u(x+\eta y) - u(x)}{\eta} \le \frac{1}{\eta}\int_{-\varepsilon}^0 (L(\gamma_\eta(s),\dot{\gamma}_\eta(s),u(\gamma_\eta(s))) - L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma(s))))ds.$$

利用 $(x,\dot{x}) \mapsto L(x,\dot{x},u(x))$ 的局部 Lipschitz 连续性，存在 $K'(\|\dot{\gamma}(s)\|)$ 使得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\eta\to 0^+} \frac{u(x+\eta y) - u(x)}{\eta}\\
&\le \limsup_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\eta}\int_{-\varepsilon}^0 (L(\gamma_\eta(s),\dot{\gamma}_\eta(s),u(\gamma_\eta(s))) - L(\gamma_\eta(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma_\eta(s))))\\
&\quad + (L(\gamma_\eta(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma_\eta(s))) - L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma(s))))ds\\
&\le \int_{-\varepsilon}^0 \Big(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),u(\gamma(s))) \cdot y + K'(\|\dot{\gamma}(s)\|)\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\|y\|\Big)ds.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，我们得到 (5.28) 的第一个不等式。类似地，定义 $\gamma_\eta : [0,\varepsilon] \to U$ 为 $\gamma_\eta(s) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon-s}{\varepsilon}\eta y$，我们得到 (5.28) 的第二个不等式。 ∎

引理 5.10 给定共轭对 (u_-, u_+)，对于 $x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$，存在 C^1 曲线 $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ 满足 $\gamma(0) = x$ 使得 $u_-(\gamma(t)) = u_+(\gamma(t))$，并且

$$u_\pm(\gamma(t')) - u_\pm(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), u_\pm(\gamma(s)))ds, \quad \forall t \le t' \in \mathbb{R}. \tag{5.29}$$

此外 $u_\pm$ 在 x 可微，并且具有相同的导数。

证明 对于 $x \in \mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$，存在 $(u_-, L, 0)$-校准曲线 $\gamma_- : (-\infty, 0] \to M$ 满足 $\gamma_-(0) = x$ 以及 $(u_+, L, 0)$-校准曲线 $\gamma_+ : [0, +\infty) \to M$ 满足 $\gamma_+(0) = x$，将这两条曲线连接起来，我们得到曲线 $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ 满足 $\gamma(0) = x$.

利用 [60] 引理 4.7 的证明，有 $u_+(\gamma_+(s)) = u_-(\gamma_+(s))$ 对 $s \ge 0$ 成立，并且 $u_+(\gamma_-(s)) = u_-(\gamma_-(s))$ 对 $s \le 0$ 成立。因此 γ 是定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的 $(u_\pm, L, 0)$-校准曲线，即 (5.29) 成立。由引理 5.9，γ 是 C^1 的，并且 $Du_\pm(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot x}(x, u_\pm(x), \dot\gamma(0))$. ∎

引理 5.11 共轭对 u_- 和 u_+ 在 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 上是 C^1 的。

证明 由引理 B.1，u_- 是 Lipschitz 连续的。根据 [4] 定理 5.3.7，如果 $H(x,p,u)$ 是局部 Lipschitz 连续的，并且关于 p 是严格凸的，那么 u_- 是半凹函数。类似地，由于 $-u_+$ 也是粘性解，它是半凹的。等价地，u_+ 是半凸的。根据[4] 定理 3.3.7，共轭对 u_- 和 u_+ 在 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 上是 C^1 的。∎

定义 5.3 给定 (u_-, u_+). 投影 Mather 集 $\mathcal{M}_H$ 定义为经过 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 的校准曲线的极限点集。由 (5.27)，有

$$\dot\gamma(0) = \frac{\partial H}{\partial p}(x, Du_\pm(x), u_\pm(x)). \tag{5.30}$$

由于粘性解 u_- 是唯一的，H 关于 p 是严格凸的，$\dot\gamma(0)$ 由 x 唯一确定。定义 Mather 集

$$\tilde{\mathcal{M}}_H := \{(x,v) : \ x \in \mathcal{M}_H,\ v = \frac{\partial H}{\partial p}(x, Du_\pm(x), u_\pm(x))\} \subset TM.$$

由于 $Du_\pm(x)$ 仅仅是连续的，常微分方程

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p}(x, Du_\pm(x), u_\pm(x))$$

的解可能不唯一。因此我们不能通过 γ 构造 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 上的流。我们通过闭测度定义 Mather 测度。定义在 TM 上的一个闭测度 μ 定义为

$$\int_{TM} |v|_x d\mu(x,v) < +\infty \quad \text{and} \quad \int_{TM} d_x\varphi(v) d\mu(x,v) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(M).$$

这里 d_x 表示关于 x 的外微分。那么 Mather 测度定义为支撑在 $\tilde{\mathcal{M}}_H$ 上的闭 Borel 概率测度。我们记 $\mathfrak{M}_H$ 是 Mather 测度集合。我们可以通过 $\mathcal{I}_{(u_-,u_+)}$ 中闭的校准曲线构造 Mather 测度。

现在，我们记 $H_i^m : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 (5.21) 中定义的 Hamilton 函数，其中 $H_i(x,p)$ 满足 Tonelli 条件。方程 $H_i^m(x, Du, u) = 0$ 的唯一粘性解记为 u_i^m. 相应的投影 Abury 集，Mather 集，投影 Mather 集以及 Mather 测度集分别记为 $\mathcal{A}_i^m$, $\tilde{\mathcal{M}}_i^m$, $\mathcal{M}_i^m$ 和 $\mathfrak{M}_i^m$.

引理 5.12 固定 $\mathbf{m} \in \mathscr{P}(M)^k$，定义

$$\mathscr{K}_i^m := \{(x,0) \in TM : H_i^m(x,0,u_i^m(x)) = 0\}.$$

那么 $\mathscr{K}_i^m$ 是 Mather 集 $\tilde{\mathscr{M}}_i^m$ 的非空紧子集，并且其中的点都是不动点。因此 Mather 测度存在。此外，$\mathscr{K}_i^m = \tilde{\mathscr{M}}_i^m$.

证明 证明与 [92] 命题 7 和 8 类似。令 $(x,0) \in \mathscr{K}_i^m$. 由于 H_i 关于 p 对称，H_i^m 对应的 Lagrange 函数满足

$$\begin{aligned} L_i^m(x,0,u_i^m(x)) &= \sup_{p \in T_x^* M} (-H_i^m(x,p,u_i^m(x))) \\ &= -\inf_{p \in T_x^* M} H_i^m(x,p,u_i^m(x)) = H_i^m(x,0,u_i^m(x)) = 0. \end{aligned}$$

令 $\gamma_x(s) \equiv x$ 对 $s \in (-\infty, 0]$ 恒成立。那么对于所有 $t<0$，有

$$u_i^m(x) - u_i^m(\gamma_x(t)) = \int_t^0 L_i^m(\gamma_x(s), \dot{\gamma}_x(s), u_i^m(\gamma_x(s)))ds = \int_t^0 L_i^m(x,0,u_i^m(x))ds = 0.$$

因此 γ^x 是一条 $(u_i^m, L_i^m, 0)$-校准曲线。根据命题 2.9，有 $T_t^+ u_i^m(x) = u_i^m(x)$. 由定理 2.3，极限 $\lim_{t\to+\infty} T_t^+ u_i^m(x)$ 存在，并且等于 $H_i^m(x,Du,u)=0$ 的正向弱 KAM 解 v_i^m. 函数对 (u_i^m, v_i^m) 是共轭对。令 $t \to +\infty$，我们得到 $v_i^m(x) = u_i^m(x)$，即 $x \in \mathscr{A}_i^m$. 由 Mather 集的定义，有 $(x,0) \in \tilde{\mathscr{M}}_i^m$.

由于 H_i^m 是局部 Lipschitz 连续的，并且关于 p 严格凸，粘性解 u_i^m 在 M 上是半凹的。令 x_0 是 u_i^m 的极小点，那么 u_i^m 在 x_0 处可微，并且 $Du_i^m(x_0)=0$. 由于 u_i^m 是解，有 $H_i^m(x_0,0,u_i^m(x_0)) = 0$. 因此 $\mathscr{K}_i^m$ 非空。

我们还需要证明 $\mathscr{K}_i^m \supset \tilde{\mathscr{M}}_i^m$. 令 $\gamma(s)$ 是 $\mathscr{M}_i^m$ 中的一条轨道，我们需要证明它是不动点。由 $u_m^i|_{\mathscr{A}_i^m}$ 和 $\gamma(s)$ 的 C^1 光滑性，结合 (5.30)，有

$$\frac{d}{ds} u_i^m(\gamma(s)) = \langle Du_i^m(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = \langle Du_i^m(\gamma(s)), \frac{\partial H_i}{\partial p}(\gamma(s), Du_i^m(\gamma(s))) \rangle.$$

由于 $\mathscr{M}_i^m$ 是极限集，Mather 的回归性依然成立。由于 H_i 关于 p 对称，有 $\langle p, \partial H_i/\partial p \rangle \geq 0$ 并且等号成立当且仅当 $p=0$. 如果 $Du_i^m(\gamma(s)) \neq 0$，那么 $du_i^m(\gamma(s))/ds > 0$，与 $\mathscr{M}_i^m$ 的回归性矛盾。因此 $Du_i^m(\gamma(s)) = 0$，从而 $\dot{\gamma}(s) = 0$. 我们最终得到 $\tilde{\mathscr{M}}_i^m$ 中的点有形式 $(x,0)$，并且满足 $H_i^m(x,0,u_i^m(x)) = 0$. ∎

引理 5.13 对于任意 $\mathbf{m} \in \mathscr{P}(M)^k$，令 $\mathbf{u}^m$ 表示 (5.18) 的唯一粘性解。那么 $\mathbf{u}^m$ 关于 $\mathbf{m}$ 是一致有界等度 Lipschitz 的。令 $\mathbf{m}_j \in \mathscr{P}(M)^k$ 在 d^k 的意义下收敛于 $\mathbf{m}_0$，那么 $\mathbf{u}^{m_j}$ 一致收敛于 $\mathbf{u}^{m_0}$.

证明 由 (B)(F1) 以及 $H_i(x,0)$ 的有界性，存在足够大的常数 C 使得对于任意的 $\mathbf{m} \in \mathscr{P}(M)^k$，$(C,\dots,C)$ 和 $(-C,\dots,-C)$ 分别是 (5.18) 的粘性上解和下解。根据比较定理，常数 C 就是 $\mathbf{u}^m$ 的一致界。对应于 $H_i^m(x,p,u)$ 的 Lagrange 函数 $L(x,\dot{x},u)$ 由 (5.25) 给出，并且对于 $|\dot{x}|_x \leq 1$ 关于任意 $\mathbf{m}$ 是一致有界的。利用和引理 B.1 类似的讨论，可以证明 $\mathbf{u}^m$ 关于 $\mathbf{m}$ 是等度 Lipschitz 的。由 Arzelá-Ascoli 定理，存在序列 $\mathbf{u}^{m_{j_k}}$ 一致收敛于 $\mathbf{u}^*$. 令 H_i^m 由 (5.21) 给出。由 (F2)，$H_i^{m_{j_k}}$ 在 $T^*M \times \mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛于

$$H_i^*(x,p,u) := H_i(x,p) + B_{ii}(x)u + \sum_{j=1, j\neq i}^{k} B_{ij}(x)u_j^*(x) - F(x,\mathbf{m}_0).$$

由粘性解的稳定性，$\mathbf{u}^*$ 是 (5.18) 在 $(m_1,\dots,m_k) = \mathbf{m}_0$ 时候的粘性解。根据假设 (B)，(5.18) 的粘性解是唯一的，因此 $\{\mathbf{u}^m\}$ 的极限点只有 $\mathbf{u}^{m_0}$. ∎

定理 5.3 的证明. 由 Prokhorov 定理和 Tychonoff 定理，$(\mathscr{P}(M)^k, d^k)$ 是紧凸的。令 $\pi : TM \to M$ 是投影映射，诱导了推前映射 $\pi_\#$. 定义集值映射

$$\Psi : \mathscr{P}(M)^k \rightrightarrows \mathscr{P}(M)^k,$$

其中我们定义集合

$$\Psi(\mathbf{m}) := \{(\pi_\# \eta_1^m, \ldots, \pi_\# \eta_k^m) : \eta_i^m \in \mathfrak{M}_i^m\}.$$

根据引理 5.12 容易验证 Ψ 的值是非空凸集。为了应用 Kakutani 不动点定理，我们还需要证明 Ψ 的图是闭的。假设当 $j \to +\infty$ 时 $d^k(\mathbf{m}_j, \mathbf{m}) \to 0$ 以及 $d^k(\mu^j, \mu) \to 0$，其中 $\mu^j \in \Psi(\mathbf{m}_j)$. 我们需要证明 $\mu \in \Psi(\mathbf{m})$.

既然 $\mu^j \in \Psi(\mathbf{m}_j)$，存在序列 η^j 满足 $\eta_i^j \in \mathfrak{M}_i^{m_j}$ 以及 $\mu_i^j = \pi_\# \eta_i^j$. 由引理 5.12，有

$$\operatorname{supp}(\eta_i^j) \subset M \times \{0\} =: K_0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ j \in \mathbb{N},$$

其中 supp 表示 Borel 概率测度的支撑集。因此 η_i^j 是胎紧的。选取子列，我们可以假设 $d^k(\eta^j, \eta) \to 0$，其中极限 $\eta \in \mathscr{P}(M)^k$ 并且 $\mu_i = \pi_\# \eta_i$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 成立。

现在我们证明 $\eta_i \in \mathfrak{M}_i^m$，从而 $\mu \in \Psi(\mathbf{m})$. 我们首先证明 η_i 是闭测度。由于 K_0 是紧的，积分 $\int_{TM} |v|_x d\eta_i$ 是有限的。由 K_0 的定义有

$$\int_{TM} d_x\varphi(v) d\eta_i = \int_{K_0} d_x\varphi(v) d\eta_i = 0, \quad \forall \varphi \in C^1(M),$$

这说明 η_i 是闭的。

接下来我们证明 $\operatorname{supp}(\eta_i) \subset \mathscr{K}_i^m$. 既然 η_i^j 按 w^*-拓扑收敛于 η_i，对任意 $(x_0, v_0) \in \operatorname{supp}(\eta_i)$，存在序列 $(x_j, v_j) \in \operatorname{supp}(\eta_i^j)$ 以它为极限点。由引理 5.12 以及 $\eta_i^j \in \mathfrak{M}_i^{m_j}$，我们有 $v_j = 0$ 以及

$$\begin{aligned} H_i^{m_j}(x_j, 0, u_i^{m_j}(x_j)) =& H_i(x_j, 0) + B_{ii}(x_j) u_i^{m_j}(x_j) \\ &+ \sum_{j=1, j\neq i}^{k} B_{ij}(x_j) u_j^{m_j}(x_j) - F(x_j, \mathbf{m}_j) = 0. \end{aligned}$$

令 $j \to +\infty$，由引理 5.13 以及条件 (F1)(F2)，我们得到 $v_0 = 0$ 以及 $H_i^m(x_0, 0, u_i^m(x_0)) = 0$. 因此 Ψ 的图是闭的。我们最终得到 Ψ 有至少一个不动点 $\bar{\mathbf{m}}$.

令 $\bar{\mathbf{u}}(x) = (\bar{u}_1(x), \ldots, \bar{u}_k(x))$ 是弱耦合方程组 (5.18) 中取 $(m_1, \ldots, m_k) = \bar{\mathbf{m}}$ 的唯一粘性解。那么存在 Mather 测度 $\bar{\eta}_i$ 满足 $\pi_\# \bar{\eta}_i = \bar{m}_i$. 由于 $\bar{\eta}_i$ 是闭的，对所有 $\varphi \in C^1(M)$ 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{TM} d_x\varphi(v) d\bar{\eta}_i = \int_{\operatorname{supp}(\bar{\eta}_i)} d_x\varphi(v) d\bar{\eta}_i \\ &= \int_{\operatorname{supp}(\bar{m}_i)} \langle D\varphi(x), \frac{\partial H_i}{\partial p}(x, D\bar{u}_i(x)) \rangle d\bar{m}_i = \int_M \langle D\varphi(x), \frac{\partial H_i}{\partial p}(x, D\bar{u}_i(x)) \rangle d\bar{m}_i. \end{aligned}$$

因此 $\bar{\mathbf{m}}$ 在分布的意义下满足 (5.19). 证毕。

5.3　本章小结

在本章，作为第 3 章有关结论的应用，我们考虑了耦合的非线性偏微分方程组的可解性，其中不动点定理的思想起到了关键作用。对于弱耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组，我们利用单调递减的接触型 Hamilton-Jacobi 方程的结论克服了传统的单调性条件不成立时的困难。通过迭代过程 5.9 证明了粘性解的存在性，这本质上可以看作是一类不动点定理的证明。对于平均场博弈模型，我们通过 Kakutani 不动点定理，证明了该模型广义解的存在性。

第 6 章　总结与展望

最后我们对本文做一个总结。我们的主要研究对象是显含未知函数的 Hamilton-Jacobi 方程。由于这类方程的特征线方程定义了一个接触变换，我们称之为接触型的 Hamilton-Jacobi 方程。在第 2 章，我们考虑了最一般的情形，即 $H(x,p,u)$ 关于 u 一致 Lipschitz 连续。在第 3 章，我们将第 2 章得到的结论应用于 $H(x,p,u)$ 关于 u 单调递增和单调递减的情形。在第 4 章，我们将第 2 章得到的结论应用于两类 $H(x,p,u)$ 关于 u 非单调的模型。在第 5 章，我们将第 3 章得到的结论应用于耦合的非线性方程组。

作为展望，本文给出若干尚待解决的问题。这些问题主要集中在如下两个研究对象上：

- 弱耦合 Hamilton-Jacobi 方程组；
- 带粘性项的二阶 Hamilton-Jacobi 方程。

对于这两类研究对象，我们都可以定义相应的解半群以及它的表示公式。但是将解半群直接应用于解的长期行为的研究是困难的。这些困难源于我们缺乏对解半群表示公式中的极小曲线的理解。对于前者，对于每个指标，都存在相应的极小曲线，因此极小曲线可以看作是一个集合。对于后者，极小曲线是测度空间上的。当方程不显含未知函数，这一曲线的运动方程由 Fokker-Planck 方程给出。

6.1　弱耦合 Hamilton-Jacobi 方程组

长期行为

文献 [88–89] 考虑了非常特殊的情形，其中半群是非扩张的。在他们的假设下，演化方程组的粘性解一致收敛于相应的定态方程组。对于更一般的情形，这一结论可能不成立。为了说明这一问题的复杂性，我们回顾一下注 2.1，对于单个一阶 Hamilton-Jacobi 方程，演化方程粘性解随着 $t\to+\infty$ 的下极限是相应定态方程的粘性解。对于指标 $i\in\{1,\dots,m\}$，考虑发展型的弱耦合 Hamilton-Jacobi 方程组

$$\begin{cases} \partial_t u_i(x,t)+H_i(x,Du_i(x,t),\mathbf{u}(x,t))=0,\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x)\in C(M). \end{cases}$$

令 T_t 是相应的解半群。定义 $\check{\varphi}\in C(M,\mathbb{R}^k)$ 的分量为

$$\check{\varphi}_i(x)=\liminf_{t\to+\infty} T_t\varphi_i(x),$$

但是这个函数不是相应定态方程组

$$H_i(x,Du_i(x,t),\mathbf{u}(x,t))=0$$

的粘性解。这里我们给出一个例子：令 $\mathbb{S}^1$ 是单位圆，并且 $(x,t)\in\mathbb{S}^1\times(0,+\infty)$. 考虑

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x,t)+|Du_1(x,t)|^2+u_1(x,t)^2-u_2(x,t)-1=0,\\ \partial_t u_2(x,t)+|Du_2(x,t)|^2+u_2(x,t)^2+u_1(x,t)-1=0. \end{cases}$$

这个方程组有下面的时间周期解

$$\begin{cases} u_1=\sin(x+t),\\ u_2=\cos(x+t). \end{cases}$$

容易看到下极限 $\check{\varphi}$ 等于 $(-1,-1)$，它既不是相应定态方程组的粘性下解，也不是定态方程方程组的粘性上解。

弱 KAM 理论

考虑定态方程组

$$H_i(x,Du_i(x))+\sum_{j=1}^{k}B_{ij}(x)u_j(x)=c,$$

其中 $\sum_{j=1}^{k}B_{ij}(x)=0$ 对每个 i 和 $x\in M$ 成立。文献 [81] 通过 Mañé 矩阵定义了这个方程组的 Aubry 集。这里 Mañé 矩阵可以看作是粘性半距离的类似物。但是定义方程组的共轭对和障碍函数似乎是困难的。这些概念在研究演化方程长期行为的时候也是重要的。

6.2　带粘性项的二阶 Hamilton-Jacobi 方程

对于这类研究对象，我们主要考虑如下两类方程

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t)+H(x,Du(x,t),u(x,t))=a(x)\Delta u(x,t), & (x,t)\in M\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=\varphi(x)\in C(M), & x\in M. \end{cases}$$

以及

$$H(x,Du(x),u(x))=a(x)\Delta u(x).$$

这里粘性项系数 $a(x)\geq 0$. 对于经典 Hamilton 函数 $H(x,p,u)=\bar{H}(x,p)$ 和粘性项 $a(x)\Delta u$ 同时出现的方程，已经有了一些工作[100–101]。已有的例子说明，带粘性项的 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解的行为与一阶 Hamilton-Jacobi 方程有本质区别。我们再次回顾注 2.1. 这里我们给出一个例子，其中演化方程粘性解随 $t\to+\infty$ 的下极限仅仅是相应定态方程的粘性上解。考虑

$$u_t+u_x^2-u_x+u^2-u=u_{xx}+1,\quad (x,t)\in\mathbb{S}^1\times(0,+\infty).$$

这个方程有时间周期解 $u=\sin(x+t)$. 但是下极限 -1 不是 $u_x^2-u_x+u^2-u=u_{xx}+1$ 的解。受到定理 1.5 的启发，我们可以猜想当 Hamilton 函数关于变量 u 单调递增，同时粘性项系数 $a(x)$ 非负，相应的演化方程的粘性解 $u(x,t)$ 一致收敛于相应的定态方程。

参考文献

[1] ISHII H. Perron's methods for Hamilton-Jacobi equations[J]. Duke Math. J., 1987, 55: 369-384.

[2] JIN L, YAN J, ZHAO K. Nonlinear semigroup approach to Hamilton-Jacobi equations-a toy model[J]. Minimax Theory Appl., 2023, 8: 61-84.

[3] ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics[M]. Springer, 1978.

[4] CANNARSA P, SINESTRARI C. Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control: volume 58[M]. New York: Springer, 2004.

[5] BARDI M, CAPUZZO-DOLCETTA I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations[M]. Boston: Birhauser, 1997.

[6] AGRACHEV A A. Control theory from the geometric viewpoint[M]. Springer, 2004.

[7] BALES G. An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications[J]. Springer-Heidelberg, 2013: 49-109.

[8] BERNARD P, BUFFONI B. Optimal mass transportation and Mather theory[J]. J. Eur. Math. Soc., 2007, 9: 85-121.

[9] BERNARD P, BUFFONI B. Weak KAM pairs and Monge-Kantorovich duality[A]. 2008.

[10] BERNARD P, BUFFONI B. The Monge problem for supercritical Mañé potentials on compact manifolds[J]. Advances in Mathematics, 2007, 207(2): 691-706.

[11] VILLANI C. Optimal transport[M]. Berlin: Springer, 2009.

[12] YONG J, ZHOU X. Stochastic controls, Hamiltonian systems and HJB equations[M]. New York: Springer, 1999.

[13] CARDALIAGUET P. Notes on mean field games[Z]. 2010.

[14] BENSOUSSAN A, FREHSE J, YAM P. Mean field games and mean field type control theory [M]. Springer, 2013.

[15] CRANDALL M, ISHII H, LIONS P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations[J]. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1992, 27(1).

[16] CANNARSA P, CHENG W, FATHI A. Singularities of solutions of time dependent Hamilton-Jacobi equations. applications to Riemannian geometry[J]. Publications Mathematiques de I'IHES, 2021, 133(1): 1-40.

[17] KARDAR M, PARISI G, ZHANG Y. Dynamic scaling of growing interfaces[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 56(9): 889-892.

[18] BRUINSMA B, AEPPLI G. Interface motion and nonequilibrium properties of the random-field Ising model[J]. Phys. Rev. Lett., 1984, 52(17): 1547-1550.

[19] NAMAH G, ROQUEJOFFRE J M. Convergence to periodic fronts in a class of semilinear parabolic equations[J]. Nonlinear differ. equ. appl., 1997, 4: 521-536.

[20] BEC J, KHANIN K. Burguers turbulence[J]. Physics reports, 2007, 447(1): 1-66.

[21] EVANS L C. A survey of entropy methods for partial defferential equations[J]. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 2004, 41(4).

[22] E W, HAN J, LI Q. A mean-field optimal control formulation of deep learning[J]. Research in the Mathematical sciences, 2019, 6(1): 10.

[23] LADYZHENSKAYA O A, URAL'TSEVA N N. Linear and quasilinear elliptic equations [M]. New-York: Academic press, 1968.

[24] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A, URAL'TSEVA N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type: volume 16[M]. American Mathematical Society, 1988.

[25] LADYZHENSKAYA O A, URAL'TSEVA N N. Quasilinear elliptic equations and variational problems with many independent variables[J]. Russ. Math. Surv., 1961, 23: 17-91.

[26] AMANN H, CRANDALL M G. On some existence theorems for semi-linear elliptic equations[J]. Indiana Univ. Math. J., 1978, 27(5): 779-790.

[27] AMANN H. Existence and stability of solutions for semi-linear parabolic systems, and applications to some diffusion reaction equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1978, 81(A): 35-47.

[28] FRIEDMAN A. Partial differential equations of parabolic type[M]. Prentice-Hall, 1964.

[29] BARRON E N, JENSEN R. Semicontinuous viscosity solutions for Hamiton-Jacobi equations with convex Hamiltonians[J]. Comm. Partial Differential equations, 1990, 12: 1713-1742.

[30] ISHII H. On the equivalence of two notions of weak solutions, viscosity solutions and distribution solutions[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1995, 38: 101-120.

[31] CRANDALL M, LIONS P L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1983, 277: 1-42.

[32] LIONS P L. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations[M]. Pitman, Boston, 1982.

[33] CRANDALL M, EVANS L, LIONS P L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1984, 2: 487-502.

[34] NAMAH G, ROQUEJOFFRE J M. Remarks on the time-asymptotic behavior of the solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. Comm. Partial Differential Equations, 1999, 24(1): 883-893.

[35] ARNOLD V I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations[M]. New York: Springer, 1983.

[36] JING W, MITAKE H, TRAN H. Generalized ergodic problems: existence and uniqueness structures of solutions[J]. J. Differential equations, 2020, 268(6): 2886-2909.

[37] CHEN Q, CHENG W, ISHII H, et al. Vanishing contact structure problem and convergence of the viscosity solutions[J]. Comm. Partial Differential Equations, 2019, 44(9): 801-836.

[38] LIONS P L, PAPANICOLAOU G, VARADHAN S. Homogenization of Hamilton-Jacobi equations[J]. unpublished, 1987.

[39] DAVINI A, SICONOLFI A. A generalized dynamical approach to the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2006, 38(2): 478-502.

[40] LI X. Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations depending on unknown functions[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2017, 37(10): 5151-5162.

[41] POSCHEL J. A lecture on the classical KAM theorem[J]. Proc. Symp. Pure Math., 2001, 69: 707-732.

[42] BANGERT V. Mather sets for twist maps and geodesics on tori[J]. Dynamics reported, 1988, 1: 1-56.

[43] MATHER J. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems [J]. Math. Z., 1991, 207: 169-207.

[44] SUHR S. Aubry-Mather theory for Lorentzian manifolds[J]. J. Fixed point theory Appl., 2019, 21(2): 71.

[45] BUTTAZZO G, GIAQUINTA M, HILDEBRANDT S. One-dimensional variational problems, an introduction[M]. New York: Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1998.

[46] MATHER J. Variational construction of connecting orbits[J]. Ann. Inst. Fourier, 1993, 43 (5): 1349-1386.

[47] DAVINI A, FATHI A, ITURRIAGA R, et al. Convergence of the solutions of the discounted Hamilton-Jacobi equation: convergence of the discounted solutions[J]. Invent. Math., 2016, 206(1): 29-55.

[48] GOMES D. A stochastic analogue of Aubry-Mather theory[J]. Nonlinearity, 2002, 15(3): 581-603.

[49] FATHI A. Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics[M]. Lyon: preliminary version 10, 2008.

[50] FATHI A. Solutions KAM faibles conjuguées et barrières de Peierls[J]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1997, 325: 649-652.

[51] BERNARD P. The dynamics of pseudographs in convex Hamiltonian systems[J]. J. Amer. Math. Soc., 2008, 21(3): 615-669.

[52] FATHI A, SICONOFI A. Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation[J]. Invent. Math., 2004, 155: 363-388.

[53] BRAVETTI A. Contact Hamiltonian dynamics: the concept and its use[J]. Entropy, 2017, 19: 535.

[54] BRAVETTI A, SERI M, VERMEEREN M, et al. Numerical integration in celestial mechanics: a case for contact geometry[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2020, 132(1): 1-29.

[55] BRAVETTI A, TAPIAS D. Thermostat algorithm for generating target ensembles[J]. Physical Review E, 2016, 93(2): 022139.

[56] CIAGLIA F M, CRUZ H, MARMO G. Contact manifolds and dissipation, classical and quantum[J]. Ann. Physics, 2018, 398: 159-179.

[57] DE LéON M, SARDóN C. Cosymplectic and contact structures for time-dependent and dissipative Hamiltonian systems[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017, 50(25): 255205.

[58] WANG K, WANG L, YAN J. Implict variational principle for contact Hamiltonian systems [J]. Nonlinearity, 2017, 30: 492-515.

[59] WANG K, WANG L, YAN J. Variational principle for contact Hamiltonian systems and its applications[J]. J. Math. Pures Appl., 2019, 123: 167-200.

[60] WANG K, WANG L, YAN J. Aubry-Mather theory for contact Hamiltonian systems[J]. Comm. Math. Phys., 2019, 366: 981-1023.

[61] WANG K, WANG L, YAN J. Weak KAM solutions of Hamilton-Jacobi equations with decreasing dependence on unknown functions[J]. J. Differential Equations, 2021, 286: 411-432.

[62] CANNARSA P, CHENG W, WANG K, et al. Herglotz' generalized variational principle and contact type Hamilton-Jacobi equations[J]. Trends in Control Theory and Partial Differential Equations, 2019, 32: 39-67.

[63] CANNARSA P, CHENG W, JIN L, et al. Herglotz' variational principle and Lax-Oleinik evolution[J]. J. Math. Pures Appl., 2020, 141: 99-136.

[64] MARÒ S, SORRENTINO A. Aubry-Mather theory for conformally symplectic systems[J]. Commun. Math. Phys., 2017, 354: 775-808.

[65] MITAKE H, SOGA K. Weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and its application[J]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 2018, 57(3): 1-32.

[66] FATHI A, SICONOLFI A. PDE aspects of Aubry-Mather theory for quasiconvex Hamiltonians[J]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 2005, 22: 185-228.

[67] BALL J M, MIZEL V J. One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1985, 90: 325-388.

[68] JIN L, WANG L, YAN J. A representation formula of viscosity solutions to weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations with applications to regularizing effect[J]. J. Differential Equations, 2020, 268: 2012-2039.

[69] ICHIHARA N, ISHII H. Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 2009, 194: 383-419.

[70] ISHII H, WANG K, WANG L, et al. Hamilton-Jacobi equations with their Hamiltonians depending Lipschitz continuously on the unknown[J]. Comm. Partial Differential Equations, 2022, 47: 417-452.

[71] SU X, WANG L, YAN J. Weak KAM theory for Hamilton-Jacobi equations depending on unkown functions[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2016, 36: 6487-6522.

[72] WANG K, YAN J, ZHAO K. Time periodic solutions of Hamilton-Jacobi equations with autonomous Hamiltonian on the circle[J]. J. Math. Pures Appl., 2023, 171: 122-141.

[73] FRENKEL J, KONTOROVA T. On the theory of plastic deformation and twinning[J]. Izv. Akad. Nauk, Ser. Fiz., 1939, 1: 137-149.

[74] BARONE A, ESPOSITO F, MAGEE C J, et al. Theory and applications of the Sine-Gordon equation[J]. La Rivista del Nuovo Cimento, 1971, 1: 227-267.

[75] RUBINSTEIN J. Sine-Gordon equation[J]. J. Math. Phys., 1970, 11: 258-266.

[76] HESHENG H. Sine-Laplace equation, Sinh-Laplace equation and harmonic maps[J]. Manuscripta Math., 1982, 40: 205-216.

[77] CHENG X, LI D, QUAN C, et al. On a parabolic Sine-Gordan model[J]. Numerical Mathematics Theory Methods and Applications, 2021, 14: 1068-1084.

[78] WANG K, YAN J. Viscosity solutions of contact Hamilton-Jacobi equations without monotonicity assumptions[J]. preprint, 2021, arXiv: 2107.11554.

[79] FLEMING W H, ZHANG Q. Risk-sensitive production planning of a stochastic manufacturing system[J]. SIAM J. Control Optim., 1998, 36(4): 1147-1170.

[80] YIN G G, ZHANG Q. Continuous-time Markov chains and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[81] DAVINI A, ZAVIDOVIQUE M. Aubry sets for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations[J]. SIAM J. Math. Anal., 2014, 46(5): 3361-3389.

[82] ENGLER H, LENHART S M. Viscosity solutions for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations[J]. Proc. London Math. Soc., 1991, 63(3): 212-240.

[83] ISHII H, KOIKE S. Viscosity solutions for monotone systems of second-order elliptic PDEs [J]. Comm. Partial Differential Equations, 1991, 16: 1095-1128.

[84] DAVINI A, ZAVIDOVIQUE M. Convergence of the solutions of discounted Hamilton-Jacobi systems[J]. Advances in Calculus of Variations, 2019, 14(2): 1-15.

[85] ISHII H, JIN L. The vanishing discount problem for monotone systems of Hamilton-Jacobi equations. part 2: nonlinear coupling[J]. Calc. Var., 2020, 59(4): 1-28.

[86] JIN L, WANG L, YAN J. A representation formula of viscosity solutions to weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations with applications to regularizing effect[J]. Journal of differential equations, 2020, 268: 2012-2039.

[87] DAVINI A, SICONOLFI A, ZAVIDOVIQUE M. Random Lax-Oleinik semigroups for Hamilton-Jacobi systems[J]. J. Math. Pures Appl., 2018, 120(9): 294-333.

[88] CAMILLI F, LEY O, LORETI P, et al. Large time behavior of weakly coupled systems of first-order Hamilton-Jacobi equations[J]. Nonlinear Differ. Equ. Appl., 2012, 19: 719-749.

[89] NGUYEN V D. Some results on the large time behavior of weakly coupled systems of first-order Hamilton-Jacobi equations[J]. Journal of Evolution Equations, 2014, 14: 299-331.

[90] CAMILLI F, LEY O, LORETI P. Homogenization of monotone systems of Hamilton-Jacobi equations[J]. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2010, 16: 58-76.

[91] BENSOUSSAN A, FREHSE J, YAM P. Mean field games and mean field type control theory [M]. Springer, 2013.

[92] HU X, WANG K. Existence of solutions to contact mean field games of first order[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2022, 22(1): 289-307.

[93] LASRY J M, LIONS P L. Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire[J]. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, 343: 619-625.

[94] LASRY J M, LIONS P L. Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et controle optimal[J]. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, 343: 679-684.

[95] LASRY J M, LIONS P L. Mean field games[J]. Jpn. J. Math., 2007, 2: 229-260.

[96] HUANG M, MALHAMÉ R P, CAINES P E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop Mckean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle[J]. Commun. Inf. Syst., 2006, 6: 221-251.

[97] HUANG M, MALHAMÉ R P, CAINES P E. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: Individual-mass behavior and decentralized ϵ-Nash equilibria[J]. IEEE Trans. Automat. Control., 2007, 52: 1560-1571.

[98] CARDALIAGUET P. Long time average of first order mean field games and weak KAM theory[J]. Dyn. Games Appl., 2013, 3: 473-488.

[99] CLARKE F H, VINTER R B. Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1985, 289: 73-98.

[100] CAGNETTI F, GOMES D, MITAKE D, et al. A new method for large time behavior of degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians[J]. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2015, 32(1): 183-200.

[101] GOMES D, MITAKE H, TRAN H. The large time profile for Hamilton-Jacobi-Bellman equations[J]. Math. Ann., 2021, published online.

[102] MASO G D. An introduction to Γ-convergence[M]. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 1993.

[103] BETTIOL P, MARICONDA C. A new variational inequality in the calculus of variations and lipschitz regularity of minimizers[J]. J. Differential Equations, 2020, 5(268): 2332-2367.

附录 A　一维变分学的若干结论

A.1　Γ-收敛

下面的结论在证明 (2.2) 极小曲线的存在性与正则性时是十分有用的[45,102]。这些结论在原始文献中是在 $\mathbb{R}^n$ 上讨论的。通过局部坐标，我们不难把它们推广到黎曼流形 M 上。

引理 A.1　令 J 是一个有界区间，假设 $F(t,x,\dot{x})$ 是下半连续的，关于 $\dot{x}$ 凸，并且有下界，那么泛函

$$\mathscr{F}(\gamma)=\int_J F(s,\gamma(s),\dot{\gamma}(s))ds$$

在 $W^{1,1}(J,M)$ 上弱序列下半连续。

命题 A.1　令 M 是一个紧致连通的光滑流形。记 $I=(a,b)\subset R$ 是有界区间，$F(t,x,\dot{x})$ 是定义在 $I\times TM$ 上的 Lagrange 函数。假设 F 满足

(i) 对所有 $(x,\dot{x})$，$F(t,x,\dot{x})$ 关于 t 可测，对 a.e. 的 t，F 关于 $(x,\dot{x})$ 连续；

(ii) $F(t,x,\dot{x})$ 关于 $\dot{x}$ 凸；

(iii) $F(t,x,\dot{x})$ 关于 $\dot{x}$ 超线性增长。

那么对于任意给定的两点 x_0 和 $x_1\in M$，在 $\{x(t)\in W^{1,1}([a,b],M):\ x(a)=x_0,\ x(b)=x_1\}$ 中存在 $\int_I F(t,x,\dot{x})dt$ 的极小曲线。

定义 A.1　令 X 是一个拓扑空间，给定序列 $F_n: X\to[-\infty,+\infty]$，那么我们定义 Γ-上下极限

$$(\Gamma-\liminf_{n\to+\infty}F_n)(x)=\sup_{U\in\mathscr{N}(x)}\liminf_{n\to+\infty}\inf_{y\in U}F_n(y),$$

$$(\Gamma-\limsup_{n\to+\infty}F_n)(x)=\sup_{U\in\mathscr{N}(x)}\limsup_{n\to+\infty}\inf_{y\in U}F_n(y).$$

这里 x 的邻域 $\mathscr{N}(x)$ 可以被拓扑基替代。当上下极限相等，我们可以定义 Γ-极限。

定义 A.2　令 X 是一个拓扑空间。对于函数 $F: X\to[-\infty,+\infty]$，它的下半连续包络 sc^-F 定义为

$$(sc^-F)(x)=\sup_{G\in\mathscr{G}(F)}G(x),$$

其中 $\mathscr{G}(F)$ 为满足对所有 $y\in X$，$G(y)\le F(y)$ 的下半连续函数 G 的集合。

引理 A.2　如果 F_n 是一个单调递增序列，那么

$$\Gamma-\lim_{n\to+\infty}F_n=\lim_{n\to+\infty}sc^-F_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}sc^-F_n.$$

注 A.1 如果 F_n 是单调递增的下半连续函数序列，并且点点收敛到 F，那么 F 是下半连续的，并且根据引理 A.2，F_n 是 Γ-收敛到 F 的。

引理 A.3 如果序列 F_n 在 X 上 Γ-收敛到 F，并且存在一个紧集 $K \subset X$ 使得

$$\inf_{x\in X} F_n(x) = \inf_{x\in K} F_n(x),$$

那么 F 在 X 中取得极小值，并且

$$\min_{x\in X} F(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{x\in X} F_n(x).$$

A.2 非自治情况下极小曲线的正则性

本小节主要考虑极小曲线的正则性。考虑下面的一维变分问题

$$I(\gamma) := \int_a^b F(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))dt + \Psi(\gamma(a),\gamma(b)), \tag{P}$$

其中 γ 在绝对连续曲线类中取，Ψ 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 中取值，表示曲线两端点的约束。

接下来，我们假设极小曲线存在，并且取一条极小曲线 $\gamma_* \in W^{1,1}([a,b],M)$ 来讨论它的正则性。由于 Lavrentiev 现象，极小曲线不一定是 Lipschitz 连续的。一些反例具体可以参见 [67]. 根据 [103]，我们依然可以对于 $F := L(x,v(x,t),\dot x)$ 的 Lagrange 函数证明极小曲线的 Lipschitz 连续性，其中 $v(x,t)$ 是 Lipschitz 连续的函数 (见引理 Lemma 2.3 (1)). 我们将 [103] 中的相关结论列举如下。

(◇): F 在 $\mathbb{R}$ 中取值, 存在常数 $\varepsilon>0$ 和一个 Lebesgue-Borel-可测函数 $k:[a,b]\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得 $k(t,1)\in L^1[a,b]$，并且对于 a.e. $t\in[a,b]$ 以及所有 $\sigma>0$

$$|F(t_2,\gamma_*(t),\sigma\dot\gamma_*(t)) - F(t_1,\gamma_*(t),\sigma\dot\gamma_*(t))| \le k(t,\sigma)|t_2-t_1|,$$

其中 $t_1,t_2\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\cap[a,b]$.

引理 A.4 令 γ_* 是问题 (P) 的极小曲线。如果 F 满足条件 (◇)，那么存在一个绝对连续函数 $p\in W^{1,1}([a,b],\mathbb{R})$ 使得对于几乎所有 $t\in[a,b]$，有

$$F\left(t,\gamma_*(t),\frac{\dot\gamma_*(t)}{v}\right)v - F(t,\gamma_*(t),\dot\gamma_*(t)) \ge p(t)(v-1), \quad \forall v>0, \tag{A.1}$$

以及 $|p'(t)|\le k(t,1)$ 对 a.e. $t\in[a,b]$ 成立。

引理 A.5 令 γ_* 是问题 (P) 的极小曲线. 假设 F 是 Borel 可测的。如果 F 满足条件 (◇) 以及

(1) 超线性增长：存在函数 $\Theta:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\Theta(r)}{r} = +\infty, \quad \text{and} \quad F(t,\gamma_*(t),\xi)\ge\Theta(\|\xi\|) \quad \text{for all } \xi\in T_{\gamma_*(t)}M.$$

(2) 局部有界：存在 $\rho>0$ 和 $M\ge0$ 使得对于 a.e. $t\in[a,b]$，对于所有满足 $\|\xi\|=\rho$ 的 $\xi\in T_{\gamma_*(t)}M$ 有 $F(t,\gamma_*(t),\xi)\le M$.

那么 γ_* 是 Lipschitz 连续的。此外，如果 $\|\dot\gamma_*(t)\|>\rho$，我们在 (A.1) 中取 $v=\|\dot\gamma_*(t)\|/\rho>1$，有

$$F\left(t,\gamma_*(t),\rho\frac{\dot\gamma_*(t)}{\|\dot\gamma_*(t)\|}\right) \ge \rho\frac{\Theta(\|\dot\gamma_*(t)\|)}{\|\dot\gamma_*(t)\|} - \|p\|_\infty.$$

因此 $\|\dot\gamma_*(t)\|\le\max\{\rho,R\}$，其中 $R:=\inf\{s:\ \rho\frac{\Theta(s)}{s} > M+\|p\|_\infty\}$.

A.3 引理 2.1 的证明

当 $H(x,u,p)$ 关于 p 超线性增长，泛函 $\mathbb{L}^t$ 在 $X_t(x)$ 中取得极小是熟知的。现在我们要证明 $\mathbb{L}^t$ 在 $H(x,u,p)$ 关于 p 强制增长的时候也能取得极小。定义

$$\mathbb{L}_n^t(\gamma)=\varphi(\gamma(0))+\int_0^t L_n(\gamma(s),v(\gamma(s),s),\dot\gamma(s))ds,$$

其中 L_n 的定义见 1.3 小节。那么每个 $\mathbb{L}_n^t$ 在 $X_t(x)$ 中取得极小。定义

$$m(r):=\inf_{x\in M}\left(\inf_{\|\dot x\|\geq r}L_1(x,0,\dot x)\right),\quad \forall r\geq 0.$$

显然函数 $m(r)$ 是超线性增长的，并且

$$\begin{aligned}m(\|\dot x\|)&\leq L_n(x,0,\dot x)\leq L_n(x,u,\dot x)+\lambda|u|\\&\leq L(x,u,\dot x)+\lambda|u|,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall(x,u,\dot x)\in TM\times\mathbb{R}.\end{aligned}$$

在 $X_t(x)$ 中，对于满足 $\lim_n\mathbb{L}^t(\gamma_n)<+\infty$ 的序列 γ_n，有 $\sup_n\int_0^t m(\|\dot\gamma_n\|)ds<+\infty$，所有 γ_n 有弱收敛子列。根据引理 A.1，泛函 $\mathbb{L}^t$ 和 $\mathbb{L}_n^t$ 在 $X_t(x)$ 上是弱序列下半连续的。既然 $X_t(x)$ 是一个度量空间，泛函 $\mathbb{L}^t$ 和 $\mathbb{L}_n^t$ 也是下半连续的。注意到 $\{\mathbb{L}_n^t\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增序列，在 $X_t(x)$ 上点点收敛到 $\mathbb{L}^t$. 同时 $\mathbb{L}^t$ 和 $\mathbb{L}_n^t(\gamma)$ 都是下半连续的。根据引理 A.2，在 $X_t(x)$ 上有 $\Gamma-\lim_{n\to+\infty}\mathbb{L}_n^t=\mathbb{L}^t$.

如果 $\mathbb{L}_n^t$ 的极小曲线 γ_n 落在 $X_t(x)$ 的一个紧集里，根据引理 A.3，泛函 $\mathbb{L}^t$ 在 $X_t(x)$ 上取得极小。接下来我们证明 $X_t(x)$ 中存在这样的紧集，使得所有极小曲线 γ_n 落在其中。考虑

$$K_t(x):=\left\{\gamma\in X_t(x):\int_0^t m(\|\dot\gamma\|)ds\leq\|\phi\|_\infty+\mathbb{K}t+2\lambda Kt\right\},$$

其中 $\mathbb{K}:=\sup_{x\in M}L(x,0,0)$ 以及 $K:=\|v(x,t)\|_\infty$. 集合 $K_t(x)$ 在 $W^{1,1}([0,t],M)$ 中弱紧。根据 [45] 定理 2.13，$K_t(x)$ 在 $X_t(x)$ 中紧。对于常数曲线 $\gamma_x\equiv x$，有

$$\int_0^t m(\|\dot\gamma_x\|)ds\leq\mathbb{L}_n^t(\gamma_x)+\lambda Kt\leq\mathbb{L}^t(\gamma_x)+\lambda Kt\leq\|\phi\|_\infty+\mathbb{K}t+2\lambda Kt.$$

因此 γ_x 落在 $K_t(x)$ 中。类似地，对于极小曲线 γ_n，有

$$\begin{aligned}\int_0^t m(\|\dot\gamma_n\|)ds&\leq\mathbb{L}_n^t(\gamma_n)+\lambda Kt\leq\mathbb{L}_n^t(\gamma_x)+\lambda Kt\\&\leq\mathbb{L}^t(\gamma_x)+\lambda Kt\leq\|\phi\|_\infty+\mathbb{K}t+2\lambda Kt.\end{aligned}$$

因此所有极小曲线 γ_n 落在 $K_t(x)$ 中。

附录 B　弱 KAM 解与粘性解

命题 B.1　如果 $u \prec L$，那么 u 是 M 上的 Lipschitz 连续函数。

证明　对于任意 $x, y \in M$，令 $\alpha : [0, d(x, y)/\delta] \to M$ 是具有长度 $d(x, y)$ 的测地线，具有常速度 $\|\dot{\alpha}\| = \delta$ 并且连接 x 和 y. 那么

$$L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), u(\alpha(s))) \le \bar{C} + \lambda \|u\|_\infty, \quad \forall s \in [0, d(x, y)/\delta].$$

由 $u \prec L$ 得到

$$u(y) - u(x) \le \int_0^{d(x,y)/\delta} L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), u(\alpha(s)))ds \le \frac{1}{\delta}(\bar{C} + \lambda \|u\|_\infty) d(x, y).$$

交换 x 和 y，我们得到 u 的 Lipschitz 连续性。∎

命题 B.2　下面的叙述是等价的

(1) u_- 是 (1.2) 的粘性解；

(2) u_- 是解半群算子 T_t^- 的不动点

(3) u_- 是负向弱 KAM 解。

类似地，下面叙述是等价的

(i) $-u_+$ 是方程 $H(x, -u, -Du) = 0$ 的粘性解；

(ii) u_+ 是正向半群 T_t^+ 的不动点；

(iii) u_+ 是正向弱 KAM 解。

证明　根据定理 2.1，陈述 (2) 能得到陈述 (1). 我们说明陈述 (1) 能得到陈述 (2). 既然 u_- 是 (1.2) 的粘性解，函数 $u(x, t) := u_-(x)$ 是 (2.1) 在初值条件 $u(x, 0) = u_-(x)$ 下的粘性解。由比较定理，$u(x, t) = T_t^- u_-(x)$,，这说明 $u_- = T_t^- u_-$.

现在我们证明陈述 (3) 能得到陈述 (2). 由负向弱 KAM 解的定义，对于 $u_- \in \mathcal{S}_-$ 有

$$u_-(x) = \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ u_-(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(\tau), u_-(\gamma(\tau)), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau \right\},$$

其中极小在绝对连续曲线类中取。我们证明 $u_-(x) \le T_t^- u_-(x)$. 另一个方向是类似的。假设

$$u_-(x) > T_t^- u_-(x).$$

令 $\gamma:[0,t]\to M$ 是满足 $\gamma(t)=x$ 的 $T_t^-u_-(x)$ 的极小曲线。定义

$$F(\tau):=u_-(\gamma(\tau))-T_\tau^-u_-(\gamma(\tau)).$$

由于 $F(t)>0$ 并且 $F(0)=0$，存在 $s_0\in[0,t)$ 使得 $F(s_0)=0$ 并且 $F(s)>0$ 对所有 $s\in(s_0,t]$ 成立。由定义

$$T_s^-u_-(\gamma(s))=T_{s_0}^-u_-(\gamma(s_0))+\int_{s_0}^s L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),T_\tau^-u_-(\gamma(\tau)))d\tau,$$

并且

$$u_-(\gamma(s))\le u_-(\gamma(s_0))+\int_{s_0}^s L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),u_-(\gamma(\tau)))d\tau,$$

从而

$$F(s)\le\lambda\int_{s_0}^s F(\tau)d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式，我们得到 $F(s)\equiv 0$ 对所有 $s\in[s_0,t]$ 成立，这与 $F(t)>0$ 矛盾。

我们还需要证明陈述 (2) 能得到陈述 (3). 对于任意的绝对连续曲线 $\gamma:[t',t]\to M$，有

$$\begin{aligned}&u_-(\gamma(t))-u_-(\gamma(t'))=T_t^-u_-(\gamma(t))-T_{t'}^-u_-(\gamma(t'))\\&\le\int_{t'}^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),T_s^-u_-(\gamma(s)))ds=\int_{t'}^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u_-(\gamma(s)))ds,\end{aligned}$$

从而 $u_-\prec L$. 我们接着说明 $(u_-,L,0)$-校准曲线的存在性。我们定义一族绝对连续曲线如下：令 $\gamma_0(0)=x$ 并且 $\gamma_n:[0,1]\to M$ 是满足 $\gamma_n(1)=\gamma_{n-1}(0)$ 的 $T_1^-u_-(\gamma_{n-1}(0))$ 的极小曲线。定义 $\gamma_-:(-\infty,0]\to M$ 为 $\gamma_-(-t):=\gamma_{[t]+1}([t]+1-t)$，其中 $t>0$，那么它是绝对连续的。从而

$$\begin{aligned}u_-(\gamma_-(-[t]))-u_-(\gamma_-(-t))&=T_1^-u_-(\gamma_{[t]+1}(1))-T_{[t]+1-t}^-u_-(\gamma_{[t]+1}([t]+1-t))\\&=\int_{[t]+1-t}^1 L(\gamma_{[t]+1}(s),\dot\gamma_{[t]+1}(s),T_s^-u_-(\gamma_{[t]+1}(s)))ds\\&=\int_{-t}^{-[t]} L(\gamma_-(s),\dot\gamma_-(s),u_-(\gamma_-(s)))ds.\end{aligned}$$

类似地可以证明对于 $n=0,1,\dots,$

$$u_-(\gamma_-(-n))-u_-(\gamma_-(-n-1))=\int_{-n-1}^{-n} L(\gamma_-(s),\dot\gamma_-(s),u_-(\gamma_-(s)))ds.$$

我们得到 $\gamma_-:(-\infty,0]\to M$ 是一条 $(u_-,L,0)$-校准曲线。 ∎

命题 B.3 令 $\varphi\in Lip(M)$. 下面叙述是等价的：

(1) φ 是 (1.2) 的 Lipschitz 粘性下解。

(2) $\varphi\prec L$;

(3) 对所有 $t\ge 0$,

$$T_t^-\varphi\ge\varphi\ge T_t^+\varphi.$$

我们将证明分为如下几个引理。

引理 B.1 如果 φ 是 (1.2) 的 Lipschitz 连续的粘性下解，那么 $\varphi \prec L$.

证明 不失一般性，我们假设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集。实际上，对于每一条绝对连续曲线 $\gamma : [0,t] \to M$，我们可以找到它附近的局部坐标。也就是说，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $[0,t] = \cup_{i=0}^{N-1}[t_i, t_{i+1}]$ 满足 $t_0 = 0$，$t_N = t$，使得 $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 包含于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集。

根据 [83] 命题 2.4，存在一个函数 $q \in L^\infty([0,t], \mathbb{R}^n)$ 使得对于几乎处处的 $s \in [0,t]$，有

$$\frac{d}{ds}\varphi(\gamma(s)) = q(s) \cdot \dot{\gamma}(s),$$

并且向量 $q(s)$ 属于 $\partial_c \varphi(\gamma(s))$. 这里我们回顾 Clarke 广义梯度的定义

$$\partial_c \varphi(x) := \bigcap_{r>0} \overline{\mathrm{co}}\{D\varphi(y) : \ y \in B(x,r)\},$$

其中 φ 在 y 处可微，$\overline{\mathrm{co}}$ 表示凸组合的闭包。由于 φ 是 (1.2) 的 Lipschitz 连续的粘性下解，如果 φ 在 y 处可微，有

$$H(y, D\varphi(y), \varphi(y)) \le 0.$$

利用 H 关于 p 的凸性，以及 $\partial_c \varphi(x)$ 的定义，有

$$H(x, q, \varphi(x)) \le 0, \quad \forall q \in \partial_c \varphi(x).$$

从而

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(0)) &= \int_0^t \frac{d}{ds}\varphi(\gamma(s))ds = \int_0^t q(s) \cdot \dot{\gamma}(s)ds \\
&\le \int_0^t \Big[L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), \varphi(\gamma(s))) + H(\gamma(s), q(s), \varphi(\gamma(s)))\Big]ds \\
&\le \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), \varphi(\gamma(s)))ds,
\end{aligned}$$

故 $\varphi \prec L$. ∎

引理 B.2 如果 $\varphi \prec L$，那么对于每个 $t \ge 0$，有 $T_t^- \varphi \ge \varphi \ge T_t^+ \varphi$. 此外，如果存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得对几乎处处的 $x \in M$，有

$$H(x, Du, u) + \epsilon_0 \le 0.$$

那么

$$T_t^+ \varphi < \varphi < T_t^- \varphi.$$

证明 这里我们只证明 $T_t^- \varphi \ge \varphi$ 对所有 $t \ge 0$ 成立，$T_t^+ \varphi \le \varphi$ 的证明是类似的。我们假设存在 $x_0 \in M$ 使得 $\varphi(x_0) > T_t^- \varphi(x_0)$. 令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是 $T_t^- \varphi$ 满足 $\gamma(t) = x_0$ 的极小曲线，即

$$T_t^- \varphi(x) = \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), T_\tau^- \varphi(\gamma(\tau)))d\tau. \tag{B.1}$$

令 $F(\tau) := \varphi(\gamma(\tau)) - T_\tau^- \varphi(\gamma(\tau))$. 由于 $F(t) > 0$ 并且 $F(0) = 0$，存在 $s_0 \in [0,t)$ 使得 $F(s_0) = 0$ 并且 $F(s) > 0$ 对所有 $s \in (s_0, t]$ 成立。因此

$$F(s) \le \lambda \int_{s_0}^s F(\tau)d\tau,$$

利用 Gronwall 不等式，$F(s) \le 0$ 对所有 $s \in (s_0, t]$ 成立。这与 $F(t) > 0$ 矛盾。

接下来，我们假设存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得对于几乎处处的 $x \in M$，有

$$H(x, Du, u) + \epsilon_0 \le 0.$$

我们记

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, u) := L(x, \dot{x}, u) - \epsilon_0,$$

并且令 $\tilde{T}_t^-$ 是 $\tilde{L}$ 对应的解半群。利用上面的讨论，可以得到 $\tilde{T}_t^-\varphi \ge \varphi$ 以及 $\tilde{T}_t^+\varphi \le \varphi$. 注意到 $\tilde{L} < L$. 与 [59] 命题 3.1 相类似地，可以得到 $\tilde{T}_t^-\varphi < T_t^-\varphi$ 以及 $\tilde{T}_t^+\varphi > T_t^+\varphi$ 对所有 $t > 0$ 成立。因此 $T_t^-\varphi > \varphi$ 并且 $T_t^+\varphi < \varphi$ 对所有 $t > 0$ 成立。 ∎

引理 B.3 如果对于所有 $t > 0$，有 $T_t^-\varphi \ge \varphi$，那么 φ 是方程 (1.2) 的一个 Lipschitz 连续的粘性下解。

证明 固定 $T > 0$，由假设我们有 $T_t^-\varphi \ge \varphi$ 对所有 $t \in [0, T]$ 成立。由第 2 章，存在仅依赖于 T 和 $\|D\varphi\|_\infty$ 的常数 $R_0 > 0$ 使得 $\|DT_t^-\varphi(x)\|_\infty \le R_0$. 令 $\max\{R, \|D\varphi\|_\infty\}$. 我们做修正

$$H_R(x, u, p) := H(x, u, p) + \max\{\|p\|^2 - R^2, 0\}.$$

那么 $T_t^-\varphi$ 也是 (2.1) 中 H 替换为 H_R 的粘性解。可以证明对应于 H_R 的 Lagrange 函数 L_R 是连续的。根据 (2.1) 粘性解的唯一性，有 $T_t^-\varphi = T_t^R\varphi$，其中 $T_t^R\varphi$ 由 (2.2) 定义，并且 L 替换成 L_R.

令 φ 在 $x \in M$ 处可微。对于每个 $v \in T_xM$，存在一条 C^1 曲线 $\gamma : [0, T] \to M$ 满足 $\gamma(0) = x$ 以及 $\dot{\gamma}(0) = v$. 由假设对于所有 $t \in [0, T]$，有

$$\varphi(\gamma(t)) \le T_t^-\varphi(\gamma(t)) = T_t^R\varphi(\gamma(t)) \le \varphi(x) + \int_0^t L_R(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), T_s^R\varphi(\gamma(s)))ds.$$

两边除以 t 再令 t 趋于零，利用 γ，L_R 和 $T_t^R\varphi(x)$ 的连续性，有

$$D\varphi(x) \cdot v \le L_R(x, v, \varphi(x)).$$

由于 v 是任意的，我们得到

$$H_R(x, D\varphi(x), \varphi(x)) = \sup_{v \in T_xM} \Big[D\varphi(x) \cdot v - L_R(x, v, \varphi(x))\Big] \le 0.$$

因此，φ 是下面方程的 Lipschitz 连续的粘性下解

$$H_R(x, u(x), Du(x)) = 0.$$

由 H_R 的定义，φ 也是方程 (1.2) 的 Lipschitz 连续的粘性下解。 ∎

附录 C　Lipschitz 估计

C.1　解半群的 Lipschitz 估计

在本小节，我们将要证明下面方程的粘性解 $T_t^- \varphi(x)$ 的局部 Lipschitz 连续性

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(x, Du(x,t)) + \lambda(x) u(x,t) = 0, & (x,t) \in M \times (0, +\infty). \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in M, \end{cases}$$

其中 $\varphi \in C(M)$. 我们假设 $H(x,p)$ 是连续的，并且满足 4.1.1 小节的条件 $(\star)$. 那么相应的 Lagrange 函数 $L(x,\dot{x})$ 满足

- $L(x,\dot{x})$ 和 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})$ 都是连续的。
- 对于所有 $x \in M$，$L(x,\dot{x})$ 关于 $\dot{x}$ 是凸的。
- 存在一个超线性增长的函数 $\theta_1(r)$ 使得 $L(x,\dot{x}) \geq \theta_1(\|\dot{x}\|)$. 此外，定义 $\theta_2(r) := \max_{x \in M, \|\dot{x}\| \leq r} L(x,\dot{x})$，我们有 $L(x,\dot{x}) \leq \theta_2(\|\dot{x}\|)$.

引理 C.1 令

$$f(\varepsilon) := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon}) \cdot \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon} - L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon}),$$

那么如下性质成立

(1) 函数 $f(\varepsilon)$ 对于 $\varepsilon > -1$ 是单调递减的。特别地，我们有 $f(\varepsilon) \geq f(+\infty) = -L(x,0) \geq -\theta_2(0)$.

(2) 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > -1$，那么

$$L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}) \leq (\kappa+1)^{-1} L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) + \kappa(\kappa+1)^{-1}\theta_2(0)$$

并且

$$f(\varepsilon_2) \leq \kappa^{-1} L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) - (\kappa^{-1}+1) L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}),$$

其中 $\kappa := (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(1+\varepsilon_1) > 0$.

证明 证明与 [62] 引理 5 类似。

(1) 令 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > -1$，由 L 的凸性有

$$L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}) \geq L(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) \cdot (\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2} - \frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}),$$

其中 $\dot{x}/(1+\varepsilon_1)$ 和 $\dot{x}/(1+\varepsilon_2)$ 属于线性空间 T_xM. 从而

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1)-f(\varepsilon_2) &\geq \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2} \\ &\quad+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})\cdot(\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}-\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) \\ &=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2} \\ &=(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}))(\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}-\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})(\frac{1}{1+\varepsilon_1}-\frac{1}{1+\varepsilon_2})^{-1}\frac{1}{1+\varepsilon_1} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) 由于 L 的凸性，有

$$\begin{aligned} L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}) &\geq L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot(\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1}-\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}) \\ &=L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})+\kappa\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

由陈述 (1) 有

$$\begin{aligned} &L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})-(\kappa+1)L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2}) \\ &\geq \kappa(-L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\geq -\kappa\theta_2(0), \end{aligned}$$

得到第一个结论。此外

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\cdot\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})\leq \kappa^{-1}(L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_1})-L(x,\frac{\dot{x}}{1+\varepsilon_2})),$$

得到第二个结论。 ∎

引理 C.2 (Erdmann 条件). 对于所有 $(x,t)\in M\times(0,+\infty)$，令 $\gamma:[0,t]\to M$ 是 $T_t^-\varphi(x)$ 的极小曲线。记 $T_s^-\varphi(\gamma(s)):=u_1(s)$，其中 $s\in[0,t]$ 并且

$$E_0(s):=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))\cdot\dot{\gamma}(s)-L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)),$$

那么

$$E(s):=e^{\int_0^t\lambda(\gamma(r))dr}[E_0(s)+\lambda(\gamma(s))u_1(s)]$$

满足 $\dot{E}(s)=0$ 在 $[0,t]$ 上几乎处处成立。

证明 证明与 [63] 定理 2.2 类似，对于自治情形，也可以参考 [62] 的引理 6.

Step 1：重参数化**.** 令 $\alpha:[0,t]\to[1/2,3/2]$ 是一可测函数，满足 $\int_0^t\alpha(s)ds=t$. 我们把这类函数组成的集合记为 Ω. 定义 $\tau(s):=\int_0^s\alpha(r)dr$. 那么 $\tau(s)$ 是 $[0,t]$ 到自身的双向 Lipschitz 连续函数。函数 τ 的逆满足 $s'(\tau)=(\alpha(s(\tau)))^{-1}$ 对 a.e. $\tau\in[0,t]$ 成立。定义绝对连续曲线 $\eta:[0,t]\to M$ 为 $\eta(\tau):=\gamma(s(\tau))$，那么 $\dot{\eta}(\tau)=\dot{\gamma}(s(\tau))/\alpha(s(\tau))$. 显然 $L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))\in L^1[0,t]$.

Step 1.1. 现在我们证明存在可测函数 $\delta(s)$ 使得对于几乎处处的 $s\in[0,t]$，如果 $|\alpha(s)-1|\leq\delta(s)$，那么 $L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)/\alpha(s))\alpha(s)\in L^1[0,t]$. 我们记这样的函数 $\alpha(s)$ 构成的集合为 Ω_0. 证明与 [63] 定理 2.2 的证明 step II 类似。对于 $\alpha\in[1/2,3/2]$，定义

$$\Phi_1(s,\alpha):=L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)/\alpha)\alpha-L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)).$$

对于几乎所有的 s，由 L 关于 $\dot{x}$ 的连续性，存在 $\delta_1(s) \in (0, 1/2]$ 使得

$$-1 \leq \Phi_1(s, \alpha) - \Phi_1(s, 1) \leq 1, \quad \forall \alpha \in [1 - \delta_1(s), 1 + \delta_1(s)].$$

定义集值映射 $G : [0, t] \rightrightarrows \mathbb{R}$ 为

$$[0, t] \ni s \mapsto G(s) = \{\delta > 0 : \ \Phi_1(s, [1 - \delta, 1 + \delta]) \subset \Phi_1(s, 1) + [-1, 1]\},$$

由于 $\delta_1(s)$ 的存在，映射的值是非空的。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，定义集值映射 $G_k : [0, t] \rightrightarrows \mathbb{R}$ 为

$$\mathrm{dom}(G_k) \ni s \mapsto G_k(s) = \{\delta > 1/k : \ \Phi_1(s, [1 - \delta, 1 + \delta]) \subset \Phi_1(s, 1) + [-1, 1]\}.$$

利用可测选择定理，对每个 k，存在一个可测的选择 $g_k : \mathrm{dom}(G_k) \to \mathbb{R}$ 使得 $g_k(s) \in G_k(s)$ 对所有 $s \in [0, t] \cap \mathrm{dom}(G_k)$ 成立。注意到我们可以假设序列 g_k 在 $k \to +\infty$ 时是非减的，并且收敛于 G 的一个可测选择 g. 因此，我们可以假设 $\delta(\cdot)$ 是可测的，并且 $\delta(s) > 0$ 对几乎所有的 $s \in [0, t]$ 成立。

Step 1.2. 对于 $\alpha(s) \in \Omega_0$，由 Step 1.1，$L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)/\alpha(s))\alpha(s) \in L^1[0, t]$，因此下面的初值问题

$$\begin{cases} \dot{u}_\alpha(s) = [L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)/\alpha(s)) - \lambda(\gamma(s))u_\alpha(s)]\alpha(s), \quad a.e.\ s \in [0, t], \\ u_\alpha(0) = \varphi(\gamma(0)). \end{cases}$$

存在绝对连续的解。由 $\lambda(x)$ 的有界性，以及 [63] 命题 A.1，解是唯一的。显然 $u_\eta(\tau) = u_\alpha(s)$，其中 $u_\eta(\tau)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{u}_\eta(\tau) = L(\eta(\tau), \dot{\eta}(\tau)) - \lambda(\eta(\tau))u_\eta(\tau), \quad a.e.\ \tau \in [0, t], \\ u_\eta(0) = \varphi(\eta(0)). \end{cases}$$

注意到 $T_s^- \varphi(\gamma(s)) = u_1(s)$.

Step 1.3. 现在我们证明对于所有 $\alpha \in \Omega_0$，$u_1(t) \leq u_\alpha(t)$. 若不然，假设

$$T_t^- \varphi(x) = u_1(t) > u_\alpha(t) = u_\eta(t).$$

定义

$$F(\tau) := T_\tau^- \varphi(\eta(\tau)) - u_\eta(\tau), \quad \tau \in (0, t].$$

那么 $F(0) = 0$ 并且 $F(t) > 0$. 由连续性，存在 $s_0 \in [0, t]$ 使得 $F(s_0) = 0$ 并且 $F(\tau) > 0$ 对所有 $\tau \in (s_0, t]$ 成立。由定义

$$T_\sigma^- \varphi(\eta(\sigma)) \leq T_{s_0}^- \varphi(\eta(s_0)) + \int_{s_0}^{\sigma} \Big[L(\eta(\tau), \dot{\eta}(\tau)) - \lambda(\eta(\tau))T_\tau^- \varphi(\eta(\tau))\Big] d\tau,$$

并且

$$u_\eta(\sigma) = u_\eta(s_0) + \int_{s_0}^{\sigma} \Big[L(\eta(\tau), \dot{\eta}(\tau)) - \lambda(\eta(\tau))u_\eta(\tau)\Big] d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式得到

$$F(\sigma) \leq \lambda \int_{s_0}^{\sigma} F(\tau) d\tau,$$

从而 $F(t) = 0$. 这与 $F(t) > 0$ 矛盾。

Step 2. 变分计算. 定义泛函 $\Lambda:\Omega_0\to\mathbb{R}$ 为 $\Lambda(\alpha):=u_\alpha(t)$，那么根据 Step 1.3，$\Lambda$ 在 $\alpha=1$ 处取得极小值。对于 $0\neq\beta\in L^\infty[0,t]$ 满足 $1+\beta\in\Omega_0$，有 $1+\varepsilon\beta\in\Omega_0$ 对所有 $|\varepsilon|\leq 1$ 成立。现在我们说明导数 $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\Lambda(1+\varepsilon\beta)$ 存在，并且等于零。

Step 2.1. 对于所有 $\alpha(s)\in\Omega_0$ 和几乎处处的 $s\in[0,t]$，有

$$\begin{aligned}\dot{u}_\alpha-\dot{u}_1&=[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_\alpha]\alpha-[L(\gamma,\dot{\gamma})-\lambda(\gamma)u_1]\\&=[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_\alpha]\alpha-[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_1]\alpha\\&\quad+[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_1]\alpha-[L(\gamma,\dot{\gamma})-\lambda(\gamma)u_1]\\&=-\lambda(\gamma)\alpha(u_\alpha-u_1)+[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_1]\alpha-[L(\gamma,\dot{\gamma})-\lambda(\gamma)u_1],\end{aligned}\tag{C.1}$$

求解 (C.1) 得到

$$u_\alpha(s)-u_1(s)=\int_0^s e^{\int_\sigma^s-\lambda(\gamma(r))\alpha(r)dr}\Big\{[L(\gamma,\dot{\gamma}/\alpha)-\lambda(\gamma)u_1]\alpha-[L(\gamma,\dot{\gamma})-\lambda(\gamma)u_1]\Big\}d\sigma.$$

从而对于 $\varepsilon>0$，有

$$0\leq\frac{\Lambda(1+\varepsilon\beta)-\Lambda(1)}{\varepsilon}=\int_0^t e^{\int_s^t-\lambda(\gamma(r))(1+\varepsilon\beta)(r)dr}\lambda_\varepsilon(s)ds,$$

其中

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon(s)&:=\frac{1}{\varepsilon}\Big\{[L(\gamma,\dot{\gamma}/(1+\varepsilon\beta))-\lambda(\gamma)u_1](1+\varepsilon\beta)-[L(\gamma,\dot{\gamma})-\lambda(\gamma)u_1]\Big\}\\&=\Big[L(\gamma,\dot{\gamma}/(1+\varepsilon\beta))-\lambda(\gamma)u_1\Big]\beta+\frac{1}{\varepsilon}\Big\{L(\gamma,\dot{\gamma}/(1+\varepsilon\beta))-L(\gamma,\dot{\gamma})\Big\}.\end{aligned}$$

Step 2.2. 现在我们证明

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Lambda(1+\varepsilon\beta)=-\int_0^t e^{\int_s^t-\lambda(\gamma(r))dr}[E_0(s)+\lambda(\gamma(s))u_1(s)]\beta ds.\tag{C.2}$$

令

$$l_\varepsilon(s):=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})\cdot\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta}-L(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})+\lambda(\gamma)u_1.$$

由引理 C.1 (1)，$l_\varepsilon\geq-\theta_2(0)-\lambda_0\|T_t^-\varphi\|_\infty$. 由 L 的凸性，有

$$L(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})-L(\gamma,\dot{\gamma})\leq\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})\cdot(\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta}-\dot{\gamma})=-\varepsilon\beta\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})\cdot\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta}.$$

从而

$$\lambda_\varepsilon(s)\leq-\beta(s)\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})\cdot\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta}-L(\gamma,\frac{\dot{\gamma}}{1+\varepsilon\beta})+\lambda(\gamma)u_1\right)\leq-\beta(s)l_\varepsilon(s).\tag{C.3}$$

令 $\varepsilon\in[0,1]$，我们把 λ_ε 和 l_ε 记为 $\lambda_\varepsilon^\beta$ 和 l_ε^β. 记 β^+ 和 β^- 为 β 的正部和负部，那么 $\beta=\beta^+-\beta^-$ 并且 $\beta^\pm\geq 0$. 由 (C.3) 有

$$\lambda_\varepsilon(s)+\beta^+(s)l_\varepsilon^\beta(s)\leq\beta^-(s)l_\varepsilon^\beta(s).$$

注意到 $\beta^+(s)l_\varepsilon^\beta(s)=\beta^+(s)l_\varepsilon^{\beta^+}(s)$ 以及 $\beta^-(s)l_\varepsilon^\beta(s)=\beta^-(s)l_\varepsilon^{\beta^-}(s)$，那么

$$\lambda_\varepsilon(s)+\beta^+(s)l_\varepsilon^{\beta^+}(s)\leq\beta^-(s)l_\varepsilon^{\beta^-}(s).\tag{C.4}$$

由引理 C.1 (1)

$$\beta^-(s)l_{-\varepsilon}^{\beta^-}(s)\leq\beta^-(s)l_{-1}^{\beta^-}(s),\quad\forall\varepsilon\in(0,1).$$

由引理 C.1 (2)

$$\begin{aligned}\beta^- l_{-\varepsilon}^{\beta^-} &= \beta^- \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma, \frac{\dot{\gamma}}{1-\varepsilon\beta^-}) \cdot \frac{\dot{\gamma}}{1-\varepsilon\beta^-} - L(\gamma, \frac{\dot{\gamma}}{1-\varepsilon\beta^-}) + \lambda(\gamma)u_1 \right) \\ &\le (\kappa_\varepsilon^{\beta^-})^{-1} L(\gamma, \frac{\dot{\gamma}}{1-\beta^-}) - ((\kappa_\varepsilon^{\beta^-})^{-1} + \beta^-) L(\gamma, \frac{\dot{\gamma}}{1-\varepsilon\beta^-}) + \beta^- \lambda(\gamma)u_1,\end{aligned}$$

其中 $(\kappa_\varepsilon^{\beta^-})^{-1} = (1-\beta^-)/(1-\varepsilon)$. 既然 $1-\varepsilon\beta \in \Omega_0$ 对所有 $\varepsilon \in [0,1]$ 成立，并且 $l_{-\varepsilon}^{\beta^-}$ 有下界，我们得到 $\beta^- l_{-\varepsilon}^{\beta^-} \in L^1[0,t]$ 对所有 $\varepsilon \in (0,1]$ 成立。因此，将 (C.4) 积分，由 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$0 \le \int_0^t e^{\int_s^t -\lambda(\gamma(r))dr} l_0(s)\beta^+(s)ds \le \int_0^t e^{\int_s^t -\lambda(\gamma(r))dr} l_0(s)\beta^-(s)ds,$$

从而对任意 β，有

$$\int_0^t e^{\int_s^t -\lambda(\gamma(r))dr} l_0(s)\beta(s)ds = 0,$$

即 (C.2) 成立。

Step 3. Erdmann 条件. 注意到 $\mu(s) := \int_0^s \beta(r)dr$ 给出了 Ω_0 和下面集合之间的一一对应

$$\Omega_1 := \{\mu : [0,t] \to \mathbb{R} : \ \mu \text{ is Lischitz continuous with } \mu(0) = \mu(t) = 0, \ \mu' \in \Omega_0\}.$$

因此根据 (C.2) 有

$$0 = e^{\int_0^t -\lambda(\gamma(r))dr} \int_0^t E(s)\mu'(s)ds, \quad \forall \mu \in \Omega_1.$$

由于 $E(s) = e^{\int_0^s \lambda(\gamma(r))dr} l_0(s) \in L^1[0,t]$，根据 du Bois-Reymond 引理 ([63] 定理 2.1)，有 $\dot{E}(s) = 0$ 对几乎处处的 $s \in [0,t]$ 成立。 ∎

定理 C.1 给定两个正数 δ 和 T 满足 $\delta < T$. 对于任意 $\varphi \in C(M)$ 和 $t \in [\delta, T]$，$T_t^- \varphi(x)$ 的 Lipschitz 常数仅依赖于 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T.

证明 Step 1. 极小曲线的 Lipschitz 估计. 给定 $(x,t) \in M \times [\delta, T]$. 接下来我们记 $\gamma : [0,t] \to M$ 是 $T_t^- \varphi(x)$ 的一条极小曲线。我们要对 γ 做 Lipschitz 估计。证明与 [63] 定理 2.4 类似，对于自治情形也可以参考 [62] 命题 2. 注意到 $T_t^-(-\|\varphi\|_\infty) \le T_t^- \varphi \le T_t^- \|\varphi\|_\infty$，$T_t^- \varphi$ 的界 K 只依赖于 $\|\varphi\|_\infty$ 和 T. 从而

$$\begin{aligned}K \ge T_t^- \varphi(x) &= \varphi(\gamma(0)) + \int_0^t \Big[L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \lambda(\gamma(s)) T_s^- \varphi(\gamma(s)) \Big] ds \\ &\ge -\|\varphi\|_\infty - \lambda_0 K T + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.\end{aligned}$$

由 L 的超线性增长性质，存在常数 D 使得 $L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \ge \|\dot{\gamma}(s)\| + D$，从而

$$K + (\lambda_0 K + |D|)T + \|\varphi\|_\infty \ge \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds.$$

因此，存在 $s_0 \in [0,t]$ 使得 $\|\dot{\gamma}(s_0)\|$ 的界仅与 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T 有关。既然 $\dot{E}(s) = 0$，有

$$E_0(s) \le e^{\lambda T}(|E_0(s_0)| + \lambda_0 K) + \lambda_0 K := F_1.$$

根据 L 的凸性，有

$$L(\gamma(s), \frac{\dot\gamma(s)}{1+\|\dot\gamma(s)\|}) - L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) \geq (\frac{1}{1+\|\dot\gamma(s)\|}-1)\frac{\partial L}{\partial \dot x}(\gamma(s),\dot\gamma(s))\cdot\dot\gamma(s)$$
$$\geq (\frac{1}{1+\|\dot\gamma(s)\|}-1)(F_1 + L(\gamma(s),\dot\gamma(s))).$$

我们记 K_3 是 $L(x,\dot x)$ 在 $\|\dot x\|\leq 1$ 时的界，那么有

$$L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) \leq K_3 + (F_1+K_3)\|\dot\gamma(s)\|.$$

由 L 的超线性增长性质，$\|\dot\gamma(s)\|$ 的界仅依赖于 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T.

Step 2. $(x,t)\mapsto T_t^-\varphi(x)$ 的 Lipschitz 估计. 我们首先证明 $u(x,t) := T_t^-\varphi(x)$ 关于 x 是 Lipschitz 连续的。对任意 $r>0$ 满足 $2r<\delta$，给定 $(x_0,t)\in M\times[\delta,T]$ 和 $x, x'\in B(x_0,r)$，记 $d_0 := d(x,x')\leq 2r<\delta$ 是 x 和 x' 之间的距离，有

$$u(x',t)-u(x,t) \leq \int_{t-d_0}^t \Big[L(\alpha(s),\dot\alpha(s)) - \lambda(\alpha(s))u(\alpha(s),s)\Big]ds$$
$$- \int_{t-d_0}^t \Big[L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) - \lambda(\gamma(s))u(\gamma(s),s)\Big]ds,$$

其中 $\gamma(s)$ 是 $u(x,t)$ 的极小曲线，并且 $\alpha : [t-d_0,t]\to M$ 是满足 $\alpha(t-d_0)=\gamma(t-d_0)$ 和 $\alpha(t)=x'$ 的常速测地线。根据 Step 1，$\|\dot\gamma(s)\|$ 的界仅依赖于 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T. 由于

$$\|\dot\alpha(s)\| \leq \frac{d(\gamma(t-d_0),x')}{d_0} \leq \frac{d(\gamma(t-d_0),x)}{d_0}+1,$$

以及 $d(\gamma(t-d_0),x)\leq \int_{t-d_0}^t\|\dot\gamma(s)\|ds$，$\|\dot\alpha(s)\|$ 的界也仅与 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T 有关。交换 (x,t) 和 (x',t)，我们得到 $|u(x,t)-u(x',t)|\leq J_1 d(x,x')$，其中 J_1 仅与 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T 有关。由 M 的紧性，我们得到对于 $t\in[\delta,T]$，函数 $u(\cdot,t)$ 在 M 上 Lipschitz 连续。

接着我们证明 $u(x,t)$ 关于 t 是局部 Lipschitz 的。给定 t 和 t' 满足 $\delta\leq t<t'\leq T$. 令 $\gamma:[0,t']\to M$ 是 $u(x,t')$ 的极小曲线，那么

$$u(x,t')-u(x,t) = u(\gamma(t),t)-u(x,t)+\int_t^{t'}\Big[L(\gamma(s),\dot\gamma(s))-\lambda(\gamma(s))u(\gamma(s),s)\Big]ds,$$

其中 $\|\dot\gamma(s)\|$ 的界仅依赖于 $\|\varphi\|_\infty$，δ 和 T. 我们已经证明了对于 $t\geq\delta$，有下面结论

$$u(\gamma(t),t)-u(x,t)\leq J_1 d(\gamma(t),x)\leq J_1\int_t^{t'}\|\dot\gamma(s)\|ds\leq J_2(t'-t).$$

因此 $u(x,t')-u(x,t)\leq J_3(t'-t)$，其中 J_3 depends only on $\|\varphi\|_\infty$, δ and T. 情形 $t'<t$ 是类似的。从而 $u(x,\cdot)$ 在 $[\delta,T]$ 上是 Lipschitz 连续的。 ∎

推论 C.1　如果 $T_t^-\varphi(x)$ 的界与 t 无关，那么函数族 $\{T_t^-\varphi(x)\}_{t\geq 1}$ 是等度 Lipschitz 连续的。

证明　令 $\|T_t^-\varphi(x)\|_\infty\leq K$ 对所有 $t\geq 0$ 成立，这里界 K 与 t 无关。注意到 $T_t^-\varphi(x)=T_1^-\circ T_{t-1}^-\varphi(x)$. 在定理 C.1 中取 $\delta=1/2$ 以及 $T=1$，那么 $T_1^-\circ T_{t-1}^-\varphi(x)$ 的 Lipschitz 常数仅依赖于 K，因此与 t 无关。 ∎

注 C.1　容易验证，本节的证明在 $\lambda(x)u$ 这一项被替换成 $F(x,u)$ 时依然成立，其中

- $F(x,u)$ 和 $\frac{\partial F}{\partial u}(x,u)$ 是连续的。
- 存在常数 $\Theta>0$ 使得 $|\frac{\partial F}{\partial u}(x,u)|\leq\Theta$.

C.2 作用量函数的 Lipschitz 估计

在本节，我们假设性质 1.6-1.8 以及 4.1 成立。给定 $a, b, \delta, T \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$ 以及 $0 < \delta < T$，定义

$$\Omega_{a,b,\delta,T} := M \times [a,b] \times M \times [\delta, T].$$

由引理 4.9，已知由 (4.25) 定义的 c_1 和 c_2 是有限数。

引理 C.3 令 c_1 和 c_2 由 (4.25) 定义，存在常数 $C_{a,b,\delta,T} > 0$ 使得

$$|h^c_{x_0,u_0}(x,t)| \le C_{a,b,\delta,T}, \quad \forall (x_0,u_0,x,t) \in \Omega_{a,b,\delta,T}, \quad \forall c \in (c_1, c_2),$$

这里 $C_{a,b,\delta,T}$ 仅依赖于 a, b, δ 和 T.

证明 令

$$k = \frac{\operatorname{diam(M)}}{\delta}, \quad A = \sup_{\|\dot{x}\| \le k} L(x, \dot{x}, 0), \quad B = \inf_{(x,\dot{x}) \in TM} L(x, \dot{x}, 0).$$

下方有界. 给定 $(x_0,u_0,x,t) \in \Omega_{a,b,\delta,T}$，令 $\gamma : [0,t] \to M$ 是 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 的极小曲线，并且 $u^c(s) = h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s), s)$，其中 $s \in [0,t]$. 那么 $u^c(t) = h^c_{x_0,u_0}(x,t)$. 我们需要说明 $u^c(t)$ 下方有界，界仅依赖于 a, b, δ 和 T。有如下三种情况：

(i) $u^c(t) > 0$. 显然此时 $u^c(t)$ 的下界为 0；

(ii) $u^c(s) < 0, \forall s \in [0,t]$;

(iii) 存在 $s_0 \in [0,t]$ 使得 $u^c(s_0) = 0$ 并且 $u^c(s) \le 0, \forall s \in [s_0, t]$.

情形 (ii)：注意到 u^c 满足

$$\begin{aligned} \dot{u}^c(s) &= L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u^c(s)) + c \\ &\ge L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), 0) + \lambda u^c(s) + c \ge B + \lambda u^c(s) + c_1, \quad \forall s \in [0,t] \end{aligned}$$

并且 $u^c(0) = u_0 \in [a,b]$. 考虑 $w_1(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot{w}_1(s) = B + \lambda w_1(s) + c_1, \quad w_1(0) = u_0.$$

那么 $w_1(s) = u_0 e^{\lambda s} + \frac{B+c_1}{\lambda}(e^{\lambda s} - 1)$. 利用常微分方程比较定理，有

$$u^c(t) \ge w_1(t) = u_0 e^{\lambda t} + \frac{B+c_1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) \ge -|a| e^{\lambda T} - \frac{|B+c_1|}{\lambda}(e^{\lambda T} - 1).$$

情形 (iii)：在这种情况下，$\dot{u}^c(s) \ge B + \lambda u^c(s) + c_1$ 对 $s \in [s_0, t]$ 成立，并且 $u^c(s_0) = 0$. 令 $w_2(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot{w}_2(s) = B + \lambda w_2(s) + c_1, \quad w_2(s_0) = 0.$$

那么 $w_2(s) = \frac{B+c_1}{\lambda}\left(e^{\lambda(s-s_0)} - 1\right)$. 因此

$$u^c(t) \ge w_2(t) = \frac{B+c_1}{\lambda}\left(e^{\lambda(t-s_0)} - 1\right) \ge -\frac{|B+c_1|}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right).$$

最终我们得到

$$h^c_{x_0,u_0}(x,t) \geq -|a|e^{\lambda T} - \frac{|B+c_1|}{\lambda}(e^{\lambda T}-1).$$

上方有界. 给定 $(x_0,u_0,x,t) \in \Omega_{a,b,\delta,T}$，令 $\alpha : [0,t] \to M$ 是连接 x_0 和 x 的测地线，具有速度 $\|\dot{\alpha}\| = d(x_0,x)/t \leq \mathrm{diam}(M)/\delta = k$. 令 $v^c(s) = h^c_{x_0,u_0}(\alpha(s),s)$, $s \in [0,t]$. 那么 $v^c(t) = h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 并且 $v^c(0) = u_0$. 注意到

$$v^c(s_2) - v^c(s_1) \leq \int_{s_1}^{s_2} \big(L(\alpha(s),\dot{\alpha}(s),v^c(s)) + c\big)ds, \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t.$$

因此

$$\dot{v}^c(s) \leq L(\alpha(s),\dot{\alpha}(s),v^c(s)) + c \leq L(\alpha(s),\dot{\alpha}(s),0) + \lambda|v^c(s)| + c_2.$$

我们需要说明 $v^c(t)$ 具有上界，界仅依赖于 a, b, δ 和 T. 有如下三种情况：

(1) $v^c(t) < 0$. 在这种情况下，$v^c(t)$ 的上界是 0;

(2) $v^c(s) > 0, \forall s \in [0,t]$;

(3) 存在 $s' \in [0,t]$ 使得 $v^c(s') = 0$ 并且 $v^c(s) \geq 0, \forall s \in [s',t]$.

情形 (2)：既然 $v^c > 0$ 对所有 $s \in [0,t]$ 成立，有

$$\dot{v}^c(s) \leq L(\alpha(s),\dot{\alpha}(s),0) + \lambda|v^c(s)| + c_2 \leq A + \lambda v^c(s) + c_2,$$

并且 $v^c(0) = u_0$. 令 $w_3(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot{w}_3(s) = A + \lambda w_3(s) + c_2, \quad w_3(0) = u_0.$$

那么 $w_3(s) = u_0 e^{\lambda s} + \frac{A+c_2}{\lambda}(e^{\lambda s}-1)$. 因此

$$v^c(t) \leq w_3(t) = u_0 e^{\lambda t} + \frac{A+c_2}{\lambda}(e^{\lambda t}-1) \leq |b|e^{\lambda T} + \frac{|A+c_2|}{\lambda}(e^{\lambda T}-1).$$

情形 (3)：在这种情况下 $\dot{v}^c(s) \leq A + \lambda v^c(s) + c_2$ 对 $s \in [s',t]$ 成立，并且 $v^c(s') = 0$. 令 $w_4(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot{w}_4(s) = A + \lambda w_4(s) + c_2, \quad w_4(s') = 0.$$

那么 $w_4(s) = \frac{A+c_2}{\lambda}\left(e^{\lambda(s-s')}-1\right)$. 利用常微分方程比较定理，有

$$v^c(t) \leq w_4(t) = \frac{A+c_2}{\lambda}\left(e^{\lambda(t-s')}-1\right) \leq \frac{|A+c_2|}{\lambda}\left(e^{\lambda T}-1\right).$$

因此

$$h^c_{x_0,u_0}(x,t) \leq |b|e^{\lambda T} + \frac{|A+c_2|}{\lambda}(e^{\lambda T}-1).$$ ∎

引理 C.4 令 c_1 和 c_2 由 (4.25) 给出。存在常数 $K_{a,b,\delta,T} > 0$ 使得对于任意 $(x_0,u_0,x,t) \in \Omega_{a,b,\delta,T}$，任意 $c \in (c_1,c_2)$，以及任意 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 的极小曲线 γ，有

$$|h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s)| \leq K_{a,b,\delta,T}, \quad \forall s \in [0,t],$$

其中 $K_{a,b,\delta,T}$ 仅与 a, b, δ 和 T 有关。

证明 下方有界. 利用和引理 C.3 第一部分类似的讨论，可以证明 $h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s)$ 的下解仅与 a 和 T 有关。这里略去证明。

上方有界. 我们需要说明存在与 c 无关的常数 $K_{a,b,\delta,T}>0$ 使得

$$h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s)\le K_{a,b,\delta,T},\quad \forall s\in[0,t].$$

令 $u^c(s)=h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s)$, $s\in[0,t]$ 以及 $u^c_e=h^c_{x_0,u_0}(x,t)$. 令 $C_{a,b,\delta,T}$ 是由前一个引理给出的常数。那么 $|u^c_e|\le C_{a,b,\delta,T}$，并且有下面两种情况：

(1) $u^c_e>0$;

(2) $u^c_e\le 0$.

情形 (1)：我们断言

$$u^c(s)\le\frac{|B+c_1|}{\lambda}+\left(C_{a,b,\delta,T}+1+\frac{|B+c_1|}{\lambda}\right)e^{\lambda T},\quad \forall s\in[0,t].$$

否则，存在 $s_1\in[0,t]$ 使得

$$u^c(s_1)>\frac{|B+c_1|}{\lambda}+\left(C_{a,b,\delta,T}+1+\frac{|B+c_1|}{\lambda}\right)e^{\lambda T}.$$

那么存在 $s_2\in[0,t]$ 使得 $u^c(s_2)=u^c_e$ 并且

$$u^c(s)>u^c_e>0,\quad \forall s\in[s_1,s_2].$$

注意到对于 $s\in[s_1,s_2]$，有

$$\dot u^c(s)=L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u^c(s))+c\ge L(\gamma(s),\dot\gamma(s),0)-\lambda|u^c(s)|+c_1\ge B-\lambda u^c(s)+c_1.$$

令 $w(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot w(s)=B-\lambda w(s)+c_1,\quad w(s_1)=u^c(s_1).$$

那么 $w(s)=e^{-\lambda(s-s_1)}\left(u^c(s_1)-\frac{B+c_1}{\lambda}\right)+\frac{B+c_1}{\lambda}$. 因此，我们得到

$$u^c(s_2)\ge w(s_2)=e^{-\lambda(s_2-s_1)}\left(u^c(s_1)-\frac{B+c_1}{\lambda}\right)+\frac{B+c_1}{\lambda},$$

结合 $u^c(s_1)>\frac{|B+c_1|}{\lambda}+\left(C_{a,b,\delta,T}+1+\frac{|B+c_1|}{\lambda}\right)e^{\lambda T}$ 得到

$$u^c(s_2)>u^c_e+1.$$

导出矛盾。从而断言成立。

情形 (2)：对于这种情况，我们断言

$$u^c(s)\le\frac{|B+c_1|}{\lambda}+\left(2+\frac{|B+c_1|}{\lambda}\right)e^{\lambda T},\quad \forall s\in[0,t].$$

如果断言不成立，存在 $s_1, s_2 \in [0, t]$ 使得

$$u^c(s_1) > \frac{|B + c_1|}{\lambda} + \left(2 + \frac{|B + c_1|}{\lambda}\right) e^{\lambda T}, \quad u^c(s_2) = 1,$$

并且

$$u^c(s) \geq 1, \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

注意到

$$\dot{u}^c(s) \geq B - \lambda u^c(s) + c_1, \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

令 $v(s)$ 是下面 Cauchy 初值问题的解

$$\dot{v}(s) = B - \lambda v(s) + c_1, \quad v(s_1) = u^c(s_1).$$

那么 $v(s) = e^{-\lambda(s-s_1)}\left(u^c(s_1) - \frac{B+c_1}{\lambda}\right) + \frac{B+c_1}{\lambda}$. 因此，由 $u^c(s_1) > \frac{|B+c_1|}{\lambda} + \left(2 + \frac{|B+c_1|}{\lambda}\right) e^{\lambda T}$ 以及 $u(s_2) = 1$，有

$$u^c(s_2) > v(s_2) > 1,$$

导出矛盾。 ∎

引理 C.5 令 c_1 和 c_2 由 (4.25) 定义。令 $(x_0, u_0) \in M \times [a, b]$. 对所有 $c \in (c_1, c_2)$，函数 $(x, t) \mapsto h^c_{x_0,u_0}(x, t)$ 在 $M \times [\delta, T]$ 上是 Lipschitz 连续的，并且 Lipschitz 常数与 c 无关。

证明 令 γ 是 $h^c_{x_0,u_0}(x, t)$ 的极小曲线，并且 $u^c(s) = h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s), s)$, $s \in [0, t]$. 由引理 C.4

$$|h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s), s)| \leq K_{a,b,\delta,T}, \quad \forall s \in [0, t].$$

由 L 关于 $\dot{x}$ 的超线性增长性，存在 $D := D_{a,b,\delta,T} \in \mathbb{R}$ 使得

$$L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u^c(s)) + c \geq \|\dot{\gamma}(s)\| + D + c_1, \quad \forall s \in [0, t].$$

取 $Q := Q_{a,b,\delta,T} > 0$ 是使得下面性质成立的常数

$$a + Q\delta - |D + c_1|T > K_{a,b,\delta,T}.$$

我们断言存在 $s_0 \in [0, t]$ 使得 $\|\dot{\gamma}(s_0)\| \leq Q$. 若不然，有 $\|\dot{\gamma}(s)\| > Q, \forall s \in [0, t]$. 由于

$$\dot{u}^c(s) = L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), u^c(s)) + c \geq \|\dot{\gamma}(s)\| + D + c_1,$$

那么

$$\int_0^t \dot{u}^c(s) ds \geq \int_0^t (\|\dot{\gamma}(s)\| + D + c_1) ds.$$

因此

$$u^c(t) \geq u_0 + Qt + Dt + c_1 t \geq a + Qt + Dt + c_1 t > a + Q\delta - |D + c_1|T > K_{a,b,\delta,T},$$

导出矛盾。

因此，存在 $s_0 \in [0,t]$ 使得 $\dot\gamma(s_0)$ 的界与 c 无关。注意到

$$\frac{dH}{ds}(\gamma(s),p(s),u^c(s)) = -\big(H(\gamma(s),p(s),u^c(s)) - c\big)\frac{\partial H}{\partial u}(\gamma(s),p(s),u^c(s)),$$

其中 $c_1 < c < c_2$. 令 $c_0 = \max\{|c_1|,|c_2|\}$，利用性质 1.8 有

$$|H(\gamma(s),p(s),u^c(s))| \le \big(|H(\gamma(s_0),p(s_0),u^c(s_0))| + c_0\big)\, e^{\lambda T} - c_0.$$

利用性质 1.7，我们得到 $\|p(s)\|$ 和 $\|\dot\gamma(s)\|$ 的界与 c 无关，并且只依赖于 a, b, δ 和 T.

(i) 我们首先考虑 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 关于 x 的 Lipschitz 连续性。令 $\gamma(t)$ 是 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 的极小曲线，并且 $\Delta t = d(x,y)$. 那么

$$\begin{aligned} h^c_{x_0,u_0}(y,t) - h^c_{x_0,u_0}(x,t) =& h^c_{x_0,u_0}(y,t) - h^c_{x_0,u_0}(\gamma(t-\Delta t), t-\Delta t) \\ &+ h^c_{x_0,u_0}(\gamma(t-\Delta t), t-\Delta t) - h^c_{x_0,u_0}(x,t). \end{aligned}$$

令 $A := h^c_{x_0,u_0}(y,t) - h^c_{x_0,u_0}(\gamma(t-\Delta t),t-\Delta t)$ 以及 $B := h^c_{x_0,u_0}(\gamma(t-\Delta t),t-\Delta t) - h^c_{x_0,u_0}(x,t)$. 令 $\alpha:\ [0,\Delta t] \to M$ 是连接 $\gamma(t-\Delta t)$ 和 y 的常速测地线。那么

$$\|\dot\alpha\| = \frac{d(\gamma(t-\Delta t),y)}{d(x,y)} \le \frac{d(\gamma(t-\Delta t),x) + d(x,y)}{d(x,y)} = 1 + \frac{d(\gamma(t-\Delta t),x)}{d(x,y)}.$$

接下来我们将令 $J_i, i = 1,2,3,4$ 为独立于 c 的正数。由于 $d(\gamma(t-\Delta t),x) \le \int_{t-\Delta t}^t \|\dot\gamma(s)\| ds$，有 $d(\gamma(t-\Delta t),x) \le J_1 \Delta t$。既然我们已经证明了 $\|\dot\gamma\|$ 的界与 c 无关。因此 $\|\dot\alpha(s)\|$ 的界也与 c 无关。从而

$$\begin{aligned} A &\le \int_{t-\Delta t}^t L(\alpha(s),\dot\alpha(s),u^c(\alpha(s),s))ds \le J_2 d(x,y), \\ B &= -\int_{t-\Delta t}^t L(\gamma(s),\dot\gamma(s),u^c(\gamma(s),s))ds \le J_3 d(x,y). \end{aligned}$$

结合上面两式我们得到 $h^c_{x_0,u_0}(y,t) - h^c_{x_0,u_0}(x,t) \le J_4 d(x,y)$. 交换 x 和 y，我们得到 $|h^c_{x_0,u_0}(y,t) - h^c_{x_0,u_0}(x,t)| \le D_1 d(x,y)$，其中 D_1 与 c 无关。

(ii) 接着我们考虑 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 关于 t 的 Lipschitz 连续性。令 $\gamma(t)$ 是 $h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 的极小曲线，那么

$$\begin{aligned} h^c_{x_0,u_0}(x,t) - h^c_{x_0,u_0}(x,s) =& h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s) - h^c_{x_0,u_0}(x,s) \\ &+ \int_s^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau),u^c(\gamma(\tau),\tau))d\tau \\ \le& h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s) - h^c_{x_0,u_0}(x,s) + J_5(t-s). \end{aligned}$$

从第 (i) 点我们已经知道了

$$|h^c_{x_0,u_0}(\gamma(s),s) - h^c_{x_0,u_0}(x,s)| \le D_1 d(\gamma(s),x) \le D_1 \int_s^t \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau \le J_6(t-s).$$

因此 J_5, J_6 是与 c 无关的两个正数。从而

$$|h^c_{x_0,u_0}(x,t) - h^c_{x_0,u_0}(x,s)| \le D_2|t-s|,$$

其中 D_2 与 c 无关。 ∎

将引理 C.5 的证明稍加改动，我们可以证明

推论 C.2 令 $(x_0,u_0) \in M \times [a,b]$. 对任意 $c \in (p_1,p_2)$，函数 $(x,t) \mapsto h^c_{x_0,u_0}(x,t)$ 在 $M \times [\delta,T]$ 上是 Lipschitz 连续的，并且 Lipschitz 常数与 c 无关。这里 Lipshitz 常数仅与 a, b, δ, T 和端点值 p_1, p_2 有关。

攻读学位期间研究成果

1. Panrui Ni, Kaizhi Wang and Jun Yan, Viscosity solutions of contact Hamilton-Jacobi equations with Hamiltonians depending periodically on unknown functions. Communications on Pure and Applied Analysis, 2023, Volume 22, Issue 2: 668-685.

2. Panrui Ni, Kaizhi Wang and Jun Yan, A weakly coupled mean field games model of first order for k groups of major players. Proceedings of the American Mathematical society, accepted.

3. Panrui Ni, Multiple asymptotic behaviors of solutions in the generalized vanishing discount problem. Proceedings of the American Mathematical society, accepted.

4. Panrui Ni, Lin Wang and Jun Yan, A representation formula of the viscosity solution of the contact Hamilton- Jacobi equation and its application, Chinese Annals of Mathematics, Series B, accepted.

致谢

完成这篇博士毕业论文，我首先要感谢的是我的导师严军教授。在刚进入课题组的时候，我还对将要从事的研究领域几乎一无所知，是他为我打开了数学研究的大门。在攻读博士学位期间，我的导师不仅传授了我知识，还培养了我的数学品味，提出、分析和解决科研问题，以及独立思考的能力，这些知识和能力对我今后继续从事科研工作至关重要。在我寻求毕业后职位的过程中，他也给予了我悉心的推荐和指导，可以说我在科研道路上的每一步成长都离不开他的帮助。我的导师不仅是我学业上的领路人，也是我人生的导师和榜样。他严谨的治学态度，敏锐的学术洞察力，以及对晚辈的关爱，无不感染着我。在此，我想向我的导师致以最诚挚的感谢和最衷心的祝福。

同时，我由衷感谢上海交通大学的王楷植教授，北京理工大学的王林教授。这篇文章的大部分内容是和他们合作完成的，凝聚着他们的心血。我也要感谢同济大学的赵恺老师，课题组的许扬师姐，同窗的师兄弟舒翔和阮雨琪，他们在与我讨论的过程中给我提供了很多新的想法。我还要感谢南京大学的程崇庆教授，南京大学的程伟教授，中国科学院的张建路老师，南京理工大学的金亮老师，他们也在我的科研道路上提供了重要的帮助。当然，我要感谢本篇毕业论文的评阅人和答辩委员，感谢他们为完善这篇文章付出的时间和精力。

在我求学的过程中，始终离不开党和国家对我的培养，希望自己在之后的人生道路上能发挥自己的学科特长，做一个对国家和社会有用的人。我要感谢我的家人，感谢父母对我的养育、教导和支持。感谢我的女友对我的理解和支持。感谢各位亲朋好友的鼓励与帮助。我还要感谢已经过世的祖父，他们老一辈国家建设者的精神始终鼓舞着我前进。最后，我要感谢那个一直以来努力求学的自己，希望在之后的人生道路上，我始终不忘初心，保持着对未知的好奇和对数学本身的热爱，保持着想要为社会做出自己一份小小贡献的决心。

谨以此文献给所有关心、帮助过我的人！

复旦大学
学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。论文中除特别标注的内容外，不包含任何其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本研究做出重要贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：____________ 日期：____________

复旦大学
学位论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关收藏和利用博士、硕士学位论文的规定，即：学校有权收藏、使用并向国家有关部门或机构送交论文的印刷本和电子版本；允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。涉密学位论文在解密后遵守此规定。

作者签名：____________ 导师签名：____________ 日期：____________